ELECTRODYNAMIQUE GALILEENNE

Jean-Marie Souriau*

Journées Relativistes 1985
Marseille

*Université de Provence (Aix-Marseille I)
et
Centre de Physique Théorique (CNRS, Laboratoire propre)

Adresse Postale:

CPT – CNRS
Luminy – Case 907
F 13288 MARSEILLE CEDEX 9

CPT-85/PE. 1831

INTRODUCTION

La description d'un système matériel comportant des **aimants** et des **charges electriques**, dans le cadre de la mécanique classique, soulève quelques difficultés: il semble que le principe newtonien d'égalité de l'action et de la réaction soit violé.

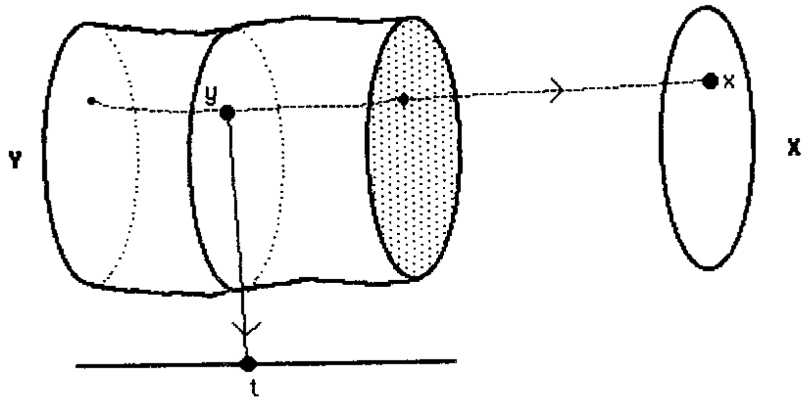
On peut éviter de poser ce problème en invoquant la propagation des ondes électromagnétiques, c'est-à-dire des effets relativistes. Mais la difficulté n'est que déplacée: on ne sait pas comment construire un modèle relativiste d'un tel système.

En fait il est possible de construire un modèle "classique" pour ce genre de système, modèle strictement compatible avec la **relativité galiléenne**. Il suffit d'utiliser la formulation **symplectique** de la mécanique – à la place des procédures traditionnelles telles que le formalisme hamiltonien. Ceci parce que la description symplectique est plus souple (elle est indépendante du choix d'un système de coordonnées), plus précise (elle donne une description globale du système), mais surtout plus générale (elle montre pourquoi la description d'un aimant comme système newtonien de points matériels est vouée à l'échec et indique par quoi il faut la remplacer).

Le modèle exposé ici peut servir de test aux procédures de la **quantification géométrique**. Est-il possible de retrouver, à partir d'un tel modèle **classique**, tous les détails de la chimie **quantique** par une procédure parfaitement régulière? Il semble que ce soit possible, au moins dans le cas de l'atome d'hydrogène. Ce problème sera étudié ultérieurement.

MECANIQUE SYMPLECTIQUE

On part à priori des hypothèses suivantes:



(1)
L'ensemble **X** des mouvements d'un système dynamique constitue une **variété symplectique**; la variété **X** est donc munie d'une **2-forme σ_X, inversible** et **fermée**: la dérivée extérieure $d\sigma_X$ doit être nulle.

(2)
Puisque σ_X est inversible, son rang est égal à la dimension de **X**; or le rang d'une 2-forme est toujours pair; nous noterons donc $2n$ cette dimension.

(3)
Comment un point x de **X** peut-il s'interpréter comme "mouvement du système" ? En lui associant, à chaque instant t, l'**état** y du système à cette date. Le **déterminisme** à la Laplace sera respecté si réciproquement, chaque état détermine un seul mouvement x.

Cette exigence se formule simplement: l'ensemble **Y** de tous les états doit être le **produit cartésien** $X \times \mathbb{R}$ de l'espace des mouvements **X** par la droite temporelle (voir figure); à ce titre donc, **Y** est une variété de dimension $2n+1$; l'image réciproque de σ_X par la projection

$y \mapsto x$ est une 2-forme fermée σ_Y; mais σ_Y n'est que "**pré-symplectique**", parce qu'elle n'est pas inversible.

En effet le **noyau** de σ_Y, qui se notera $\ker(\sigma_Y)$, a la dimension 1; il est constitué des vecteurs δy dont la projection est nulle sur **X** ; ce sont les vecteurs tangents aux courbes-mouvements qui feuillettent **Y** . Autrement dit, les **équations du mouvement** s'écrivent nécessairement:

(4)

$$dy/dt \in \ker(\sigma_Y)$$

(5)
Réciproquement, la donnée de la variété présymplectique (Y,σ_Y) suffit à décrire le système: en effet, elle détermine les équations du mouvement (4), qu'il suffit d'intégrer; le théorème sur la différentiabilité des solutions des équations différentielles par rapport aux conditions initiales montre que l'ensemble abstrait **X** des solutions de ces équations possède une structure de **variété quotient** de **X** ; du fait que la forme σ_Y est fermée, un théorème d'Elie Cartan montre que c'est un **invariant intégral absolu** des équations du mouvement, c'est-à-dire que σ_Y "descend" sur le quotient **X** , définissant une forme σ_X qui cette fois est **symplectique**.

(6)
Considérons l'exemple d'un **point matériel**; son état à une date t sera défini par sa position **r** et sa vitesse **v**; après le choix d'un repère (et en particulier d'unités de longueur et de temps), nous considérerons t comme un nombre, **r** et **v** comme éléments de l'espace numérique $\mathbb{R}^3$. La dimension de **Y** est 7, n=3.

La forme présymplectique σ_Y, qui caractérise la **dynamique** du point, va incorporer deux éléments essentiels: la **masse** m du point, et la **force** F à laquelle il est soumis. En utilisant deux variations δ et δ', elle sera donnée par la formule:

(7)

$$\sigma_Y(\delta y,\delta' y) = \langle m\delta\mathbf{v}-F\delta t\,,\,\delta'\mathbf{r}-\mathbf{v}\delta' t\rangle - \langle m\delta'\mathbf{v}-F\delta' t\,,\,\delta\mathbf{r}-\mathbf{v}\delta t\rangle$$

les crochets $\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. Il est immédiat que les équations du mouvement (4) s'écrivent ici:

$$dr/dt = \mathbf{v}\ , \qquad m\, dv/dt = F$$

et coïncident donc, comme il se doit, avec la loi de Newton.

Une variante est possible; en ajoutant à $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{Y}$ la relevée d'une 2-forme **fermée** de l'espace-temps décrit par $(\mathbf{r},t)$, on obtient:

(8)

$$\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{Y}(\delta y,\delta' y) = \langle m\delta\mathbf{v}\ , \delta'\mathbf{r}-\mathbf{v}\delta' t\rangle - \langle m\delta'\mathbf{v}, \delta\mathbf{r}-\mathbf{v}\delta t\rangle$$
$$+ \langle E\ , \delta\mathbf{r}\ \delta' t - \delta'\mathbf{r}\ \delta t\rangle + \mathrm{vol}(H, \delta\mathbf{r}\ , \delta'\mathbf{r}),$$

vol désignant la 3-forme volume de l'espace orienté. Les équations du mouvement s'écrivent alors:

(9)

$$dr/dt = \mathbf{v}\ , \qquad m\, d\mathbf{v}/dt = E - H \times \mathbf{v}$$

le signe × désignant le "produit vectoriel" de l'espace; ceci permet donc de décrire des "forces de Laplace", telles que les forces de Coriolis ou les forces magnétiques. Bien entendu les hypothèses géométriques formulées ici ont des conséquences strictes pour E et H : ce sont nécessairement des fonctions de y, donc de $t,\mathbf{r},\mathbf{v}$; de plus la condition de fermeture impose que ces vecteurs ne dépendent que de t et $\mathbf{r}$, et qu'ils vérifient les équations:

$$\mathrm{div}\, H = 0\ , \qquad \mathbf{rot}\, E + \partial H/\partial t = 0$$

c'est le cas, en particulier, s'il s'agit des **forces électro-magnétiques** que subit une particule chargée, puisqu'on reconnait le **premier groupe des équations de Maxwell**.

RELATIVITE GALILEENNE

(10)

Les divers repères qui sont utilisés en mécanique (par exemple le repère terrestre) sont généralement **accélérés** les uns par rapport aux

autres; on passe de l'un à l'autre par l'action d'un groupe de dimension infinie, le **groupe de Coriolis**.

(11)

Le groupe de Coriolis contient un sous-groupe **G** de dimension 10, le **groupe de Galilée**, que l'on peut constituer avec les matrices de format 5×5:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice 3×3 orthogonale et de déterminant 1 [$A \in \mathbf{SO}(3)$], $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, e un nombre.

G agit sur l'espace-temps selon:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du fait que **G** n'est pas distingué dans le groupe de Coriolis, cette action n'est opérationnelle que si on l'accompagne du choix d'une famille particulière de repères - les **repères d'inertie**; comme **G** est son propre normalisateur, les passages d'un repère d'inertie à un autre se font via **G**.

L'action du groupe de Galilée se **relève** à l'espace d'évolution d'un point matériel, selon les formules:

(12)

$$\mathbf{r} \to A\mathbf{r} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}$$
$$t \to t + e$$
$$\mathbf{v} \to A\mathbf{v} + \mathbf{b}$$

(13)

Nous admettrons que cette action s'étend à l'espace d'évolution de **tout système dynamique isolé**, et qu'elle **respecte les mouvements de ces systèmes**: si deux points y et y' appartiennent à un mouvement x, et si $g \in \mathbf{G}$, $g(y)$ et $g(y')$ appartiendront encore à un même mouvement, que nous pourrons désigner par $g(x)$ - définissant du même coup une action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$.

Telle est la formulation dynamique de ce qu'on appelle aujourd'hui le principe de **relativité galiléenne**.

L'interprétation de ce principe est quasi-évidente dans le cas $\mathbf{b} = 0$ (homogénéité du temps, homogénéité et isotropie de l'espace); la première vérification expérimentale d'un cas $\mathbf{b} \neq 0$ a été faite en 1640 par Gassendi, sur une galère devant Marseille ($\mathbf{b}$ était la vitesse de la galère par rapport aux quais).

(14)

Puisque les éléments de $\mathbf{G}$ agissent sur $\mathbf{Y}$ en respectant les courbes-mouvements, elles respectent aussi la direction tangente à ces courbes - c'est-à-dire $\ker(\sigma_Y)$ (Cf. (4)); nous admettrons ici le principe de Galilée **fort**, à savoir que $\mathbf{G}$ respecte non seulement le noyau de σ_Y, mais en fait σ_Y elle-même; ce qui s'écrira avec la notation des images réciproques:

$$g^*(\sigma_Y) = \sigma_Y \qquad \forall g \in \mathbf{G}$$

et entraînera le respect par l'action de $\mathbf{G}$ de la forme symplectique σ_X de $\mathbf{X}$.

Chaque fois qu'un groupe de Lie $\mathbf{G}$ agit ainsi sur une variété (pré)-symplectique, une machinerie mathématique peut se déclencher, que nous n'analyserons pas ici techniquement (voir par exemple J.M. Souriau, Travaux en cours, Rencontres de Balaruc II, pp. 53-91, 1985); indiquons seulement quelques objets que cette technique permet de construire ((15) à (18)).

(15)
L'action symplectique de $\mathbf{G}$ définit un objet mathématique m, élément d'un espace de cohomologie noté $\mathbf{H}^2$. Dans le cas du groupe de Galilée, la dimension de $\mathbf{H}^2$ est 1, m est donc un scalaire: il s'agit de la **masse** (totale) du système.

(16)

Au moins localement, l'action de $\mathbf{G}$ est associée à une application $y \mapsto \mu$ de $\mathbf{Y}$ dans le dual $\mathfrak{G}^*$ de l'algèbre de Lie. La variable μ s'appelle le **moment**.

Dans le cas galiléen, ce moment est un objet à 10 composantes; il regroupe l'**impulsion** $\mathbf{p}$, l'**énergie** E, le **moment cinétique** $\mathbf{l}$ et un objet $\mathbf{g}$ qui est relié au **centre de masse** G par la formule $\mathbf{g} = Gm - \mathbf{p}t$.

Sur les 10 composantes de μ, 9 peuvent être complètement définies par voie géométrique; la dernière, l'énergie, contient une constante additive irréductible. Ceci résulte du fait que $\mathbf{H}^1$, premier espace de cohomologie de $\mathfrak{G}$, est ici de dimension 1.

(17)

$\mathbf{G}$ agit symplectiquement sur $\mathbf{X}$ comme sur $\mathbf{Y}$; du fait que ces actions sont équivariantes, on déduit qu'elles ont même moment, c'est-à-dire que μ ne dépend de y que par l'intermédiaire de x. Ses 10 composantes sont donc des **constantes du mouvement**: c'est la version symplectique du théorème de Noether.

Il en résulte en particulier que le barycentre G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{p}/m$; c'est ce qu'on appelle parfois le "principe de l'inertie".

Pourquoi "principe"? Parce que ce résultat ne s'obtient, dans la formulation newtonienne de la mécanique, qu'en postulant effectivement un principe ad hoc: l'**égalité de l'action et de la réaction**. C'est donc inutile si on postule le principe fort de Galilée - qui inclut toutes les hypothèses nécessaires.

(18)

Il existe enfin une **décomposition** de l'espace des mouvements en produit cartésien ("décomposition barycentrique"); $\mathbf{X}$ est le produit de l'espace des mouvements d'un point matériel libre (le centre de masse affecté de la masse totale) par un espace des "mouvements propres"; deux des constituants de μ, le moment cinétique et l'énergie, se décomposent en somme: **moment cinétique propre** (fonction du seul mouvement propre) + **moment cinétique orbital** $\mathbf{g} \times \mathbf{p}/m$, **énergie propre + énergie orbitale** $\mathbf{p}^2/2m$.

SYSTEMES ELEMENTAIRES

(19)

La technique précédente permet de reconstituer certains systèmes dynamiques **à partir du seul groupe de Galilée**: ce sont les "systèmes élémentaires", ceux pour lesquels l'action de **G** est transitive. L'espace des mouvements **X** et l'espace d'évolution **Y** sont des **quotients** de **G**; l'action de **G**, la structure (pré)symplectique sont déterminées géométriquement.

(20)

Le premier exemple est celui du **point matériel** libre, dont la description symplectique est évidemment:

$$\sigma_Y(\delta y, \delta' y) = \langle m\delta\mathbf{v}, \delta'\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta' t\rangle - \langle m\delta'\mathbf{v}, \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta t\rangle$$

(Cf.(7) et (8)); l'action de **G** coïncide avec la formule (12) ci-dessus.

(21)

Mais il existe un autre type d'objet élémentaire, plus complexe; la dimension de **Y** vaut alors 9 (n=4); l'espace des mouvements propres est une sphère $\mathbf{S}^2$ parcourue par un vecteur unitaire **u** de $\mathbb{R}^3$; l'**énergie propre** est nulle, le **moment cinétique propre** vaut:

$$\mathbf{u}s,$$

s étant un paramètre positif, caractéristique du système, que l'on appelle **spin**; (17) indique que le <u>vecteur spin</u> **us** pointe dans une direction fixe.

La forme symplectique s'écrit:

(22)

$$\sigma_Y(\delta y, \delta' y) = \langle m\delta\mathbf{v}, \delta'\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta' t\rangle - \langle m\delta'\mathbf{v}, \delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\delta t\rangle - \mathrm{vol}(\mathbf{u}s, \delta\mathbf{u}, \delta'\mathbf{u});$$

l'action du groupe de Galilée s'obtient en joignant:

(23)

$$\mathbf{u} \to A\,\mathbf{u}$$

aux substitutions (12).

SYSTEMES ET INTERACTIONS

(24)

Considérons d'abord un **système** de points matériels libres (ou de particules à spin) qui évoluent indépendamment. On peut décrire l'espace des mouvements du système comme le **produit cartésien** des espaces individuels, les formes symplectiques étant simplement ajoutées. Le **moment** total est la somme des moments individuels.

L'espace d'évolution présymplectique **Y** se construit canoniquement (Cf. (3)); nous noterons σ_0 la forme présymplectique "nue" ainsi définie sur **Y**.

Cette description doit être modifiée dans le cas de particules indiscernables - mais nous n'envisagerons pas ce cas ici.

Comment décrire maintenant les **actions mutuelles** de ces particules les unes sur les autres, telles qu'on le observe dans la nature?

A priori, par une **perturbation** de σ_0 ; perturbation qui permettra de décrire les **forces** que subissent ces points.

Ainsi, dans le cas d'un système de N points matériels, la forme symplectique nue:

(25)

$$\sigma_0(\delta y, \delta' y) = \sum_j \langle m_j\delta\mathbf{v}_j, \delta'\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_j\delta' t\rangle - \langle m_j\delta'\mathbf{v}_j, \delta\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_j\delta t\rangle$$

pourra être complétée par:

(26)

$$\sum_j \langle E_j, \delta\mathbf{r}_j\,\delta' t - \delta'\mathbf{r}_j\,\delta t\rangle + \mathrm{vol}(H_j, \delta\mathbf{r}_j, \delta'\mathbf{r}_j)$$

(Cf.(8)), ce qui donne comme équations du mouvement le système différentiel:

(27)

$$d\mathbf{r}_j/dt = \mathbf{v}_j, \qquad m_j\,d\mathbf{v}_j/dt = E_j - H_j \times \mathbf{v}_j$$

et permet donc de considérer que chaque particule est soumise à une force de type électromagnétique. Bien entendu la forme σ ainsi complétée sera astreinte au "principe de Maxwell" $d\sigma = 0$, ce qui fournira des conditions pour les fonctions E_j et H_j de y.

(28)
Comment pouvons-nous exprimer le fait qu'il s'agit effectivement **d'interactions**, c'est-à-dire que ces forces ont leur source **dans le système lui-même**? Seulement en écrivant que ce système est encore **isolé**, et vérifie donc le **principe de Galilée fort**.

Nous pourrons alors appliquer tous les résultats énoncés plus haut. Voici une partie des résultats de ce calcul - formulée dans un repère d'inertie:
(29)

$$H_j = 0 \qquad \forall j$$

$$\sum_j E_j = 0; \quad \sum_j r_j \times E_j = 0$$

ce qui entraîne l'existence d'une décomposition des forces sous la forme:
(30)

$$E_j = \sum_k E_{jk}$$

avec

$$E_{jk} + E_{kj} = 0, \qquad (r_j - r_k) \times E_{jk} = 0 \qquad \forall j, k$$

ce qui exprime, comme nous l'avions annoncé, le principe d'égalité d'action et de la réaction.

En écrivant l'existence globale de l'application moment, on montre de plus l'existence d'une **fonction hamiltonienne H**, responsable de l'interaction: la perturbation dûe aux forces est simplement la dérivée extérieure de la 1-forme
(31)

$$\omega = -\mathbf{H}\ dt;$$

H est une fonction réelle de y, en fait des seules variables $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N$ (à l'exclusion donc des vitesses et du temps); **H** est invariante par l'action du groupe de Galilée (et ne dépend donc que des distances mutuelles des points); les forces sont données par la formule:

(32)

$$E_j = -\partial H/\partial r_j$$

où l'on fait l'abus de notation usuel consistant à identifier vecteur et forme par l'utilisation de la métrique d'espace.
(33)
Enfin **H** s'interprète comme un constituant de l'**énergie** du système, et plus précisément de l'**énergie propre** : l'énergie totale est la somme des termes nus (donc de l'énergie cinétique) et de **H** - ce qui ne caractérise d'ailleurs **H** qu'à une constante additive près.

RESOLUTION D'UN PARADOXE

(34)
Le paradoxe, c'est celui que nous avions énoncé au début: les H_j sont **nécessairement nuls** (29), et par conséquent le schéma proposé est incapable de décrire un aimant, source de champ magnétique.

Il faut donc changer quelque chose dans les hypothèses précédentes. Quoi donc?

(35) Une expérience de magnétisme peut le suggérer. En 1915, le physicien hollandais J. De Haas a fait des mesures précises sur l'**effet gyromagnétique**: un cylindre de matériau ferro-magnétique, suspendu selon son axe, se met spontanément en rotation si on change le sens de son aimantation. De Haas a constaté que le rapport **[moment magnétique]/[moment cinétique]** ainsi mis en évidence était fixe, en grandeur et en signe, et indépendant du matériau.

La **constante universelle** ainsi mesurée pouvait évidemment s'interpréter comme appartenant en propre à un objet élémentaire constituant de tous les aimants ferromagnétiques; constituant doué d'un **moment magnétique** et d'un **moment cinétique** parallèles et d'intensités fixes.

A l'époque, l'électron était déjà connu et donc suspecté de tenir ce rôle; pourtant ce n'est que dix ans plus tard qu'on a envisagé sérieusement le **spin** de l'électron, dans ses aspects quantiques (expérience de Stern et Gerlach) - alors que l'expérience de De Haas était une mesure macroscopique d'une propriété **classique** de ce spin.

Nous allons donc pouvoir décrire les aimants en incorporant des particules à spin dans le système; particules dont la description symplectique nous a été obligeamment fournie par la géométrie du groupe de Galilée.

INTERACTIONS CHARGE-CHARGE ET AIMANT-AIMANT

L'interaction de deux particules électrisées est connue depuis Coulomb, et s'obtient par le hamiltonien d'interaction:
(36)

$$H = q_1 q_2 / |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| ,$$

q_1 et q_2 étant le charges électriques; ceci s'étend immédiatement au cas des N corps:
(37)

$$H = \Sigma_{(j,k)} q_j q_k / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|$$

la somme étant étendue aux $N(N-1)/2$ paires (j,k).

Dans le cas de deux aimants, étudié dès 1269 par Pierre de Maricourt, l'interaction se laisse décrire par:
(38)

$$H = \langle \mathbf{M}_1 , C'(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{M}_2) \rangle$$

où $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ sont les vecteurs "moment magnétique" des deux aimants et où C **désigne la fonction vectorielle coulombienne**:
(39)

$$C(\mathbf{r}) = \mathbf{r} / |\mathbf{r}|^3 ;$$

C' est sa dérivée - donc une **matrice** 3×3, d'ailleurs symétrique.

L'interprétation de l'expérience de De Haas consiste donc à attribuer à l'électron (et à toute particule à spin) un moment magnétique parallèle à son moment cinétique propre, ce qui s'écrira avec la notation (21):
(40)

$$\mathbf{M} = \mathbf{u}\,\mu ,$$

μ, mesure (algébrique) du moment magnétique, étant une caractéristique de la particule. Dès 1924, W. Pauli avait proposé ce hamiltonien (38)-(40) pour expliquer la **structure hyperfine** du spectre

de l'hydrogène, responsable en particulier de la raie de 21 cm exploitée en radio-astronomie.

Pour un système de N particules à spin aimantées, on posera simplement:
(41)

$$H = \Sigma_{(j,k)} \langle \mathbf{u}_j \mu_j , C'(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)(\mathbf{u}_k \mu_k) \rangle$$

INTERACTIONS AIMANT-CHARGE

La situation est un peu différente dans le cas d'un système contenant à la fois des particules chargées et des particules aimantées.

Considérons d'abord un système à deux corps:

n°1: particule à spin aimantée sans charge;
n°2: point matériel chargé.

L'équation du mouvement de la particule chargée, soumise à une force électromagnétique, doit s'écrire:
(42)

$$d\mathbf{r}_2/dt = \mathbf{v}_2 , \qquad m_2\, d\mathbf{v}_2/dt = (E - H \times \mathbf{v}_2)\, q_2$$

E et H étant les champs électriques et magnétiques qu'elle subit; il faut d'autre part que cette force soit caractérisée par un interaction invariante par le groupe de Galilée.

Dans le cas d'un système de points matériels, l'interaction s'obtenait nécessairement en ajoutant à la **forme nue** σ_0 la dérivée d'une 1-forme invariante ω (Cf. (31)). Même chose ici; cependant ω **n'est plus "hamiltonienne"**, c'est-à-dire de la forme $-H dt$. En effet, les faits observés se décrivent en prenant:
(43)

$$\omega(\delta y) = k \;\mathrm{vol}(\mathbf{u}_1 \mu_1 , C(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) q_2 , \delta[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1])$$

forme visiblement invariante par l'action (12)-(23) du groupe de Galilée sur chacune des particules constituant le système. La constante k est **purement phénoménologique** dans le cadre galiléen; les expériences macroscopiques suggèrent de choisir $k = 1/c$ (c: vitesse de la lumière).

Décrivons qualitativement les conséquences du choix de cette forme d'interaction (43) (nous donnerons des formules explicites au paragraphe suivant dans un cadre plus général).

Les équations générales (4) du mouvement:

$$dy/dt \in \ker(\sigma)$$

donnent bien pour la particule n°2 une équation du type (42); les valeurs obtenues pour E et H sont effectivement les expressions du champ électrique et du champ magnétique créés par un dipôle en mouvement; l'expression de E en particulier est une formulation quantitative de l'expérience de **Faraday** (1832).

E et H ainsi déterminés sont solutions des équations de Maxwell (9):

$$\operatorname{div} H = 0\,, \quad \mathbf{rot}\, E + \partial H/\partial t = 0\,,$$

et aussi des équations:

(44)

$$\mathbf{rot}\, H = 0\,, \quad \operatorname{div} E = 0\,,$$

qui tiennent lieu de second groupe des équations de Maxwell dans le cadre galiléen.

Simultanément, on obtient la "réaction" de la particule aimantée sous l'influence de la particule chargée. On la décrit encore par un champ électrique E (classique) et un champ magnétique H "créés" au point $\mathbf{r}_1$ par la particule n°2; mais H n'est pas à proprement parler un "champ", parce que sa valeur dépend non seulement de la date t et de la position $\mathbf{r}_1$ - mais aussi de la vitesse $\mathbf{v}_1$. La formule obtenue coïncide d'ailleurs avec la loi de Biot et Savart, expression quantitative de l'expérience d'**Oersted**.

A cause de l'invariance galiléenne, les résultats (15) à (18) sont valables; le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme; l'**énergie** du système, qui se réduit au terme cinétique:

(45)

$$\mathbf{E} = 1/2\, m_1 \mathbf{v}_1^{\,2} + 1/2\, m_2 \mathbf{v}_2^{\,2}$$

est intégrale première des équations du mouvement. Ce qui manifeste évidemment le caractère **non hamiltonien** de l'interaction (Cf.(33)).

En revanche, il apparaît un objet nouveau, le **moment cinétique d'interaction**:

(46)

$$1/c \quad \mathbf{u}_1 \mu_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) q_2$$

qui s'ajoute aux termes nus:

(47)

$$\mathbf{u}_1 s_1 + m_1\, \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\, \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2$$

pour constituer le moment cinétique total $\mathbf{l}$, intégrale première du système de toutes les équations du mouvement.

INTERACTIONS ELECTROMAGNETIQUES (CAS GENERAL)

Nous pouvons passer facilement au cas d'un système de N particules à spin en interaction électromagnétique.

Nous avions décrit les interactions charge-charge et aimant-aimant par une 1-forme d'interaction hamiltonienne ω ((31)-(37) et (31)-(41)); il suffit de compléter σ par les termes croisés responsables des interactions aimant-charge, construits sur le modèle (43); ω est ainsi la somme, pour toutes les paires (j,k), des ω_{jk} :

(48)

$$\begin{aligned}
\omega_{jk}(\delta y) \quad = \quad & -q_j q_k / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|\ \delta t \\
& - \langle \mathbf{u}_j \mu_j\,,\ C'(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)(\mathbf{u}_k \mu_k) \rangle\ \delta t \\
& + 1/c\ \ \mathrm{vol}\big(\mathbf{u}_j \mu_j\,,\ C(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) q_k\,,\ \delta[\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k]\big) \\
& + 1/c\ \ \mathrm{vol}\big(\mathbf{u}_k \mu_k\,,\ C(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) q_j\,,\ \delta[\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j]\big)\ ;
\end{aligned}$$

on remarque que $\omega_{kj} = \omega_{jk}$.

La forme présymplectique ainsi construite:

(49)

$$\sigma = \sigma_0 + \textstyle\sum_{(j,k)} d\omega_{jk}$$

est visiblement fermée et invariante par l'action du groupe de Galilée; elle détermine toute la dynamique du système.

Le calcul donne d'abord les constantes du mouvement qui composent le moment (notations (16)):

(50)

$$\mathbf{p} = \sum_j \mathbf{v}_j\, m_j$$

$$\mathbf{g} = \sum_j (\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_j t)\, m_j$$

$$E = 1/2 \sum_j \mathbf{v}_j^2\, m_j + \sum_{(j,k)} \left[\, q_j q_k / |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| + \langle \mathbf{u}_j \mu_j \,,\, C'(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)(\mathbf{u}_k \mu_k) \rangle \right]$$

$$\boldsymbol{\ell} = \sum_j \mathbf{r}_j \times \mathbf{v}_j\, m_j + \mathbf{u}_j s_j + 1/c \sum_{(j,k)} \left[(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) q_k \times \mathbf{u}_j \mu_j + \mathbf{u}_k \mu_k \times C(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \right] \;;$$

tous les termes s'interprètent classiquement - à l'exception de celui de la dernière ligne, qui représente le moment cinétique d'interaction (Cf.(45)).

Pour écrire les équations du mouvement (4), on considérera les champs (fonctions de $\mathbf{r}$ et t):

(51)

$$E = \sum_j C(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)\, q_j$$

$$B = - \sum_j C'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)(\mathbf{u}_j \mu_j)$$

$$F = - \sum_j \left[d(\mathbf{u}_j \mu_j)/dt \times C(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + C'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)(\mathbf{u}_j \mu_j) \times d\mathbf{r}_j/dt \right]$$

$$S = - \sum_j C(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)(\mathbf{v}_j q_j)$$

(F et S sont respectivement les champs de Faraday et de Biot-Savart), et les expressions suivantes, qui impliquent aussi une vitesse $\mathbf{v}$:

(52)

$$\mathcal{E} = E - B \times \mathbf{v}/c + F/c$$

$$\mathcal{B} = B + E \times \mathbf{v}/c + S/c$$

Alors chacune des particules vérifie:

(53)

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$$

$$d(\mathbf{u}s)/dt = -\mathcal{B} \times \mathbf{u}\mu$$

$$d(\mathbf{v}m)/dt - E \times d(\mathbf{u}\mu)/cdt = \mathcal{E}q + (\partial\mathcal{B}/\partial\mathbf{r})(\mathbf{u}\mu)$$

Dans le cas où le système contient aussi des points matériels, il suffit de négliger dans les équations (51) et (53) les termes contenant $\mathbf{u}\mu$, $\mathbf{u}s$.

Telles s'écrivent les équations du mouvement (4) qui assurent les dix lois de conservation liées à l'invariance galiléenne .