

CALCUL DIFFÉOLOGIQUE ET DYNAMIQUE

Jean - Marie Souriau

Le but de ce travail est de montrer comment la "difféologie" peut s'utiliser dans quelques branches de la Physique Mathématique où la géométrie différentielle est difficile à manier (espaces singuliers, espaces de dimension infinie).

L'idée initiale est de reformuler les axiomes des variétés, le point de départ n'étant plus les *cartes*, mais les "*plaques*", simples applications différentiables sans choix a priori d'une dimension particulière: les "*espaces difféologiques*" sont paramétrisables numériquement, mais ils ne sont pas modélés sur un espace numérique.

Il apparaît alors que des théories géométriques utiles (*homotopie, fibrations, formes différentielles, distributions*, etc.) fonctionnent aussi bien dans ce cadre allégé; extension donc du champ d'application de la géométrie différentielle.

Les §§ 1 à 5 donnent un aperçu mathématique de cette théorie. Le § 6 expose quelques applications à la relativité; un espace difféologique, l'*hyperspace*, peut s'utiliser pour interpréter la répartition de matière et d'électricité dans l'espace-temps.

1. Espaces difféologiques

1.1. Une axiomatique

Notations et définitions

$\mathbb{R}^n$ désignera l'espace des matrices-colonnes

$$r = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \\ \dots \\ r^n \end{pmatrix}$$

$r^1, r^2, \dots, r^n$ réels; Les parties *ouvertes non vides* d'un espace $\mathbb{R}^n$ seront appelées *espaces numériques* (de dimension n). Les applications d'un espace numérique dans un ensemble X s'appelleront *paramétrisations* de X .

Soient P et P' deux paramétrisations de X ; nous dirons que P' prolonge P (ou que P est une restriction de P'):

$$P \leq P'$$

si

$$r \in \text{Source}(P) \Rightarrow P'(r) = P(r);$$

Cette relation est évidemment une relation d'ordre sur les paramétrisations de X ; toute partie *majorée* possède une *borne supérieure*, notée **sup**.

Soit R un espace numérique; $Q : S \rightarrow R$ une paramétrisation de R .

Q sera dite *lisse* si, pour tout $s \in S$, les coordonnées r^j de

$$r = Q(s)$$

soient fonctions continues des coordonnées s^k de s et admettent des dérivées partielles continues de tous les ordres.

La matrice M des dérivées partielles du 1er ordre:

$$M_k^j = \frac{\partial r^j}{\partial s^k}$$

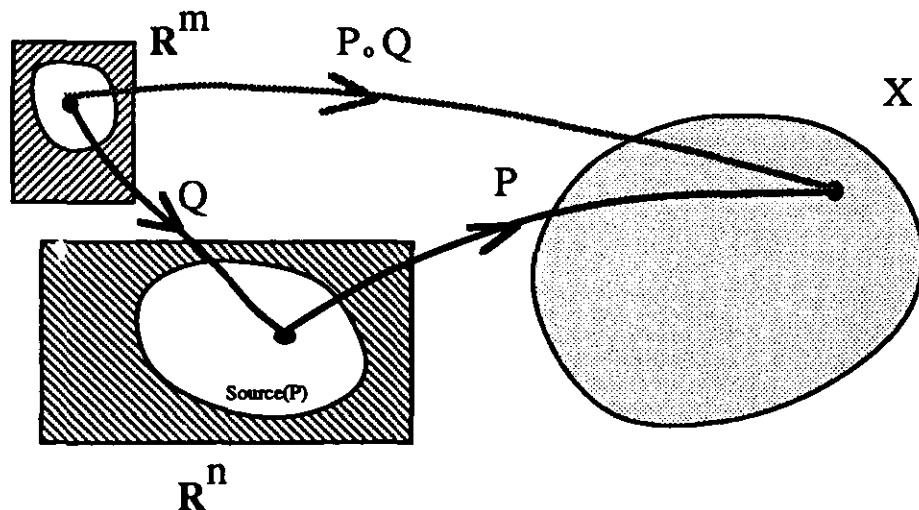
s'appellera **matrice jacobienne**.

L'espace numérique S sera appelé **source** de Q ; l'image de Q est une partie de R .

Exemple: l'inclusion d'un espace numérique S dans un espace numérique R est lisse.

Axiomes des difféologies

Considérons maintenant un ensemble *quelconque* X .



Nous nous proposons de privilégier certaines paramétrisations - que nous appellerons **plaques** de X ; nous dirons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des plaques est une **difféologie** de X si les propriétés (1,2,3,4) suivantes sont réalisées:

1)	Chaque plaque de X est une paramétrisation de X
2)	Les images des plaques recouvrent X
3)	Si (P_j) est une famille majorée de plaques alors $\sup(P_j)$ est une plaque
4)	Si P est une plaque de X alors Q est une paramétrisation lisse de $\text{Source}(P)$ $P \circ Q$ est une plaque de X .

Un ensemble X pour lequel on aura choisi une difféologie $\mathcal{D}$ s'appellera **espace difféologique**; on pourra le noter

$$(X, \mathcal{D})$$

Conséquences élémentaires

- Il résulte des axiomes que toute paramétrisation *constante* est une plaque; par conséquent tous les espaces numériques sont sources de plaques de X - *quelle que soit leur dimension*..
- Toute paramétrisation prolongée par une plaque est une plaque.
- Sur tout espace difféologique X , une partie Y de X sera dite $\mathcal{D}$ -ouverte ssi les images réciproques de Y par toutes les plaques de $\mathcal{D}$ sont ouvertes; on obtient ainsi une topologie de X (la $\mathcal{D}$ -topologie).

Exemple d'espace difféologique

Soit X un espace numérique.

Un résultat classique d'analyse réelle montre que les paramétrisations lisses de X constituent une difféologie; nous l'appellerons *difféologie lisse* de X . La topologie associée est la topologie usuelle.

Mais il existe d'autres difféologies sur un espace numérique. Un exemple: la difféologie *spaghetti* (resp. *lasagne* ⁽¹⁾) de l'espace $\mathbb{R}^3$, c'est celle dont les plaques sont les paramétrisations lisses telles que le rang de la matrice jacobienne soit partout ≤ 1 (resp. ≤ 2).

Sauf mention du contraire, les espaces numériques seront toujours munis de la difféologie lisse.

1.2. Applications différentiables

Définition

Si X et Y sont des espaces difféologiques, une application:

¹ Michèle Audin, communication privée.

$$A : X \rightarrow Y$$

sera dite **différentiable** si, pour toute plaque P de X , $A \circ P$ est une plaque de Y .
Nous noterons $D(X,Y)$ l'ensemble de ces applications.

Commentaires

Les applications différentiables sont automatiquement continues - si X et Y sont munies de leurs $\mathcal{D}$ -topologie.

Dans le cas où X et Y sont des espaces numériques, les applications différentiables de X dans Y sont les applications lisses.

Catégorie difféologique

Il est immédiat que toute composée d'applications différentiables est différentiable; plus précisément que l'on obtient une **catégorie** en prenant comme *objets* les espaces difféologiques, comme *flèches* les applications différentiables.

Les isomorphismes de la catégorie s'appelleront bien entendu **difféomorphismes** ⁽²⁾. Les difféomorphismes d'un espace difféologique X sur lui-même constituent un *groupe* que nous noterons $\text{Diff}(X)$.

1.3. Finesse

Définition

Soit X un ensemble; soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux difféologies de X .

Nous dirons que $\mathcal{D}_1$ est **plus fine** que $\mathcal{D}_2$ si l'application identique I :

$$I : (X, \mathcal{D}_1) \rightarrow (X, \mathcal{D}_2)$$

est **différentiable**; autrement dit si $\mathcal{D}_1$ contient *moins de plaques* que $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$$

la finesse est évidemment une *relation d'ordre* entre difféologies de X .

Sur tout ensemble X , la difféologie la moins fine (difféologie grossière) est évidemment l'ensemble des paramétrisations de X ; la difféologie la plus fine existe aussi, nous l'appellerons **difféologie discrète** ⁽³⁾.

Exemple

- Sur l'espace $\mathbb{R}^3$, la difféologie spaghetti (1.1) est plus fine que la difféologie lisse. Strictement, parce que l'application identique

$$I : (\mathbb{R}^3, \text{lisse}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \text{spaghetti})$$

² Ce sont donc les bijections d'espace à espace qui sont différentiables et dont l'inverse est différentiable.

³ Une plaque de la difféologie discrète, c'est une paramétrisation *localement constante*: elle est constante dans chacune des composantes de sa source.

n'est pas une plaque, donc *n'est pas différentiable*.

Difféologie engendrée

Soit (P_j) une famille quelconque de paramétrisations d'un ensemble X .
Il existe des difféologies de X contenant les P_j (par exemple la difféologie grossière);
leur intersection $\mathcal{D}$ est encore une difféologie; c'est donc *la plus fine des difféologies pour lesquelles les P_j soient des plaques*; on l'appellera **difféologie engendrée** par les P_j .

1.4. Opérations sur les difféologies

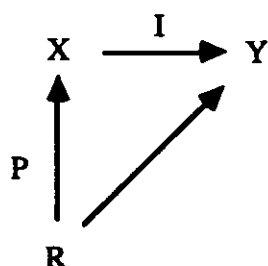
Inductions

Soit X un ensemble, A une application de X dans un espace difféologique $(Y, \mathcal{D})$:

$$A : X \rightarrow (Y, \mathcal{D})$$

La moins fine difféologie de X grâce à laquelle A soit différentiable existe: nous l'appellerons **difféologie image réciproque**.

Si X et Y sont des espaces difféologiques, nous appellerons **induction** de X dans Y toute *injection* $I: X \rightarrow Y$ telle que la difféologie de X soit l'image réciproque par I de celle de Y .



Une paramétrisation P de X est une plaque ssi $I \circ P$ est une plaque de Y .

En particulier, toute partie X d'un espace difféologique Y peut se munir de la **difféologie induite** - image réciproque de celle de Y par l'injection canonique $I: X \rightarrow Y$, qui est alors une *induction* ⁽⁴⁾.

Exemples

- Soit Y un espace numérique lisse, X une partie ouverte de Y .
Alors la difféologie induite sur X est la difféologie lisse.
- Un *cercle* dans $\mathbb{R}^2$, une *sphère* dans $\mathbb{R}^3$ seront munis de la difféologie induite.
- La *demi-droite fermée* $\mathbb{R}^+$ peut se munir de la difféologie induite de celle de $\mathbb{R}$ ⁽⁵⁾.

Subductions

Soit $(X, \mathcal{D})$ un espace difféologique, A une application de X dans un ensemble Y :

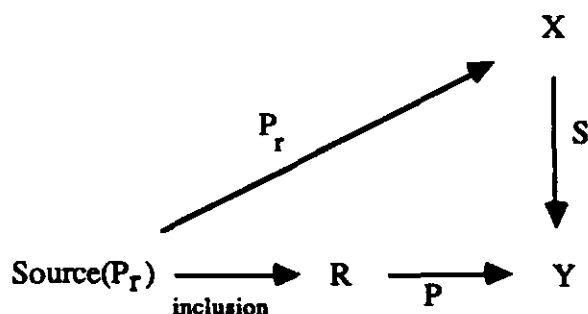
⁴ Les plaques de X sont les plaques de Y dont l'image est contenue dans X .

⁵ Exercice: déterminer les difféomorphismes de $\mathbb{R}^+$ (difficile...).

$$A : (X, \mathcal{D}) \rightarrow Y$$

La plus fine difféologie de Y pour laquelle A soit différentiable existe: nous l'appellerons **difféologie image**. C'est évidemment la difféologie engendrée par les $A \circ P$ ($P \in \mathcal{D}$).

Si X et Y sont difféologiques, nous appellerons **subduction** de X sur Y toute *surjection* $S: X \rightarrow Y$ telle que la difféologie de Y soit l'image par S de celle de X .



Alors une paramétrisation $P: R \rightarrow Y$ est une plaque de Y ssi elle est **localement relevable**: pour chaque point r de R , il existe une plaque P_r de X dont la source contient r et telle que P prolonge $S \circ P_r$.

En particulier, *tout quotient* Q d'un espace difféologique X peut se munir de la **difféologie quotient**, image de celle de X par l'application canonique $X \rightarrow Q$ - qui est alors une subduction.

Exemples

- La demi-droite fermée $\mathbb{R}^+$ est l'image de la droite $\mathbb{R}$ par l'application $t \mapsto t^2$; la difféologie image ainsi définie sur $\mathbb{R}^+$ est strictement plus fine que la difféologie induite de celle de $\mathbb{R}$ ⁽⁶⁾.
- Soit α un nombre réel; la relation $\approx$ sur $\mathbb{R}$:

$$[x \approx y] \Leftrightarrow [y - x = p + q\alpha \quad (p, q \in \mathbb{Z})]$$

est une équivalence; soit T_α le quotient difféologique de $\mathbb{R}$ par cette équivalence.

Si α est rationnel, T_α est difféomorphe au cercle; si α est irrationnel, T_α est le *tore de Denjoy-Poincaré* ⁽⁷⁾.

Produit d'espaces

⁶ L'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2$ est une plaque de $\mathbb{R}^+$ pour la difféologie induite, mais pas pour la difféologie image par $t \mapsto t^2$ (elle n'est pas relevable autour de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

⁷ On montre que T_α et T_β sont difféomorphes ss'il existe $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ps - qr = \pm 1, \quad \beta = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s};$$

le théorème de Galois sur les fractions continues périodiques permet de classer les irrationnels α selon la structure du groupe des difféomorphismes de T_α (α quadratique ou non).

Si X_j est une famille quelconque d'espaces difféologiques (non vides), on peut munir leur produit cartésien

$$X = \prod_j X_j$$

de la **difféologie produit**, la moins fine qui rende différentiable toutes les projections canoniques $\pi_j: X \rightarrow X_j$; elles sont alors des subductions.

Une application $A: Y \rightarrow X$ est différentiable ssi tous les $\pi_j \circ A$ sont différentiables.

Somme d'espaces

Si X_j est une famille quelconque d'espaces difféologiques, on peut munir leur somme

$$X = \sum_j X_j \quad (8)$$

de la **difféologie somme**, la plus fine qui rende différentiables toutes les injections canoniques $i_j: X_j \rightarrow X$; elles sont alors des inductions.

Espaces de fonctions différentiables

Si X, Y sont des espaces difféologiques, on peut munir l'espace $D(X,Y)$ de la **difféologie fonctionnelle**: c'est la difféologie la moins fine pour laquelle l'application "valuation":

$$(A,x) \mapsto A(x)$$

soit différentiable (du produit difféologique $D(X,Y) \times X$ dans Y).

Une paramétrisation $P: R \rightarrow D(X,Y)$ est une plaque ssi

$$(r,x) \mapsto P(r)(x)$$

est différentiable (de $R \times X$ dans Y).

1.5. Homotopie

Composantes

Soit X un espace difféologique. Parmi les partitions de X , il en est une qui est caractérisée par chacune des deux propriétés (a,b) suivantes:

a) C'est la plus fine partition de X qui en fasse une *somme de parties*;

b) C'est la plus fine partition de X pour laquelle l'espace quotient soit *discret*.

Les classes de cette partition s'appelleront **composantes** de X ; deux points de X seront dits **homotopes** s'ils appartiennent à une même composante.

⁸ Par définition, X est l'ensemble des couples (j,x) , $x \in X_j$. L'application $i_j: x \mapsto (j,x)$ est une injection, dite *canonique*, de X_j dans X .

Arcs

Pour que x soit homotope à y , il faut et il suffit qu'il existe un **arc** A (c'est-à-dire une plaque $R \rightarrow X$) tel que

$$A(0) = x, A(1) = y$$

Un espace sera dit **connexe** s'il possède une seule composante⁽⁹⁾; les composantes d'un espace quelconque sont ses parties connexes maximales.

Les composantes difféologiques ainsi définies coïncident avec les composantes de la $\mathcal{D}$ -topologie; elles sont $\mathcal{D}$ -ouvertes et $\mathcal{D}$ -fermées.

1.6. Cas des variétés

On peut définir une **variété** X comme un espace difféologique dont tout point possède un $\mathcal{D}$ -voisinage difféomorphe à un espace numérique.

Voici une définition équivalente:

On appellera **carte** d'un espace difféologique X ⁽¹⁰⁾ toute plaque P vérifiant les conditions suivantes:

l'image de P est ouverte;

P est une induction.

On appellera **atlas** tout ensemble de cartes dont les images recouvrent X .

Alors X est une **variété** ssi X possède un atlas.

La *structure de variété* de X est caractérisée par l'atlas $\mathcal{A}$ de toutes ses cartes ("atlas maximal"); sa difféologie par l'ensemble $\mathcal{D}$ de toutes ses plaques. Remarquons que ces données sont *équivalentes*: $\mathcal{A}$ a été défini en fonction de $\mathcal{D}$ ci-dessus; réciproquement, $\mathcal{D}$ est la difféologie engendrée par $\mathcal{A}$ (ou par n'importe quel atlas). La *structure de variété* est donc un simple cas particulier de difféologie.

2. Groupes difféologiques

2.1. Axiomes des groupes difféologiques

Définitions

G sera dit **groupe difféologique** si:

G est un groupe;

G est un espace difféologique;

l'application $(g, g') \mapsto g^{-1}g'$ est différentiable.⁽¹¹⁾

Les morphismes de groupe qui sont différentiables sont évidemment les flèches d'une catégorie, la **catégorie des groupes difféologiques**.

Exemples:

⁹ C'est-à-dire si deux points quelconques sont homotopes.

¹⁰ Ou si l'on préfère, *cocarte* (alors c'est P^{-1} qui sera une carte).

¹¹ Comme application de l'espace difféologique produit $G \times G$ dans G .

- Un **groupe de Lie**, c'est un groupe difféologique dont la difféologie est celle d'une variété.
- Le groupe $\text{Diff}(X)$ de tous les difféomorphismes d'un espace difféologique X peut se munir de la **difféologie standard** - la moins fine difféologie de groupe qui rende différentiable la valuation:

$$(g, x) \mapsto g(x) \quad (12)$$

Sous-groupes et quotients

Tout *sous-groupe* d'un groupe difféologique (muni de la difféologie induite) est un groupe difféologique.

Tout *groupe quotient* d'un groupe difféologique (muni de la difféologie quotient) est un groupe difféologique.

Dans un groupe difféologique G , la composante G^0 de l'élément neutre est un sous-groupe distingué; le quotient G/G^0 (*groupe des composantes*) est difféologiquement discret.

Exemples

Tout groupe de difféomorphismes, tout groupe quotient d'un groupe de Lie, sont des groupes difféologiques. Ainsi:

- Le groupe des isométries d'une variété riemannienne X est un groupe difféologique (comme sous-groupe de $\text{Diff}(X)$); c'est un groupe de Lie;
- Le groupe des symplectomorphismes d'une variété symplectique X est un groupe difféologique; ce n'est pas un groupe de Lie;
- le tore de Denjoy-Poincaré T_α , quotient du groupe de Lie $(\mathbb{R}, +)$ par le sous-groupe $\mathbb{Z} + \alpha \mathbb{Z}$, est un groupe difféologique.

2.2. Actions de groupe

Définition

Soient X et G un espace et un groupe difféologiques.

On appellera **action différentiable** de G sur X tout morphisme différentiable:

$$G \rightarrow \text{Diff}(X)$$

$\text{Diff}(X)$ étant muni de sa difféologie standard.

Exemples:

- Si G est un groupe de Lie et X une variété, on retrouve la notion classique d'action différentiable.
- L'action d'un groupe difféologique sur lui-même, par translation à gauche, est différentiable.

2.3. Fibrés principaux

¹² P est une plaque de $\text{Diff}(X)$ ssi les applications $(r, x) \mapsto P(r)(x)$ et $(r, x) \mapsto P(r)^{-1}(x)$ sont différentiables.

Définition

Une action de G sur X s'appellera **fibration principale** ⁽¹³⁾ ssi:

$$(g, x) \mapsto (g(x), x)$$

est une induction ⁽¹⁴⁾.

Alors l'action est libre et différentiable; chaque orbite de G dans X (munie de la difféologie induite de celle de X) est difféomorphe à G .

On dira que X est un **espace fibré principal**, de **groupe structural** G ; les orbites de G s'appelleront **fibres**; l'espace quotient B (ensemble abstrait des fibres muni de la difféologie quotient) s'appellera **base**.

Un **isomorphisme de G -fibré** $X \rightarrow X'$, c'est un difféomorphisme qui commute avec l'action de G . Il descend sur un difféomorphisme des bases.

Soit X un espace difféologique; désignons par $\text{Carde}(X)$ l'espace des classes de fibrés principaux de base X et de groupe structural $(R, +)$ - classes selon les isomorphismes de fibré. Il est possible de donner à $\text{Carde}(X)$ une structure d'espace vectoriel réel, dont l'élément nul est la classe des fibrés triviaux.

Exemples:

- Dans le cas où G est un groupe de Lie, et où la base B est une variété séparée, X est nécessairement une variété séparée. C'est le cas des *espaces fibrés principaux localement triviaux*, au sens classique ⁽¹⁵⁾.
- Soit G un groupe difféologique, H un sous-groupe quelconque (muni de sa difféologie de sous-groupe); l'action de H sur G par translations à gauche est une fibration principale; la base est l'espace quotient G/H , muni de la difféologie quotient (espace difféologique homogène).
- Toute variété connexe séparée X est un **espace homogène** (on peut faire le choix suivant: $G = \text{Diff}(X)$, muni de la difféologie standard; $H =$ stabilisateur d'un point arbitraire x).
- Nous rencontrerons un exemple plus subtil en 6.1.

2.4. Revêtements

Définitions

- Soit X un espace difféologique. On appellera **revêtement** de X tout fibré principal de base X et de groupe structural *discret* ⁽¹⁶⁾.
- Un espace connexe X sera dit **simplement connexe** si le groupe structural de tout revêtement connexe est nul ⁽¹⁷⁾.

¹³ P. IGLESIAS, Thèse.

¹⁴ Du produit difféologique $G \times X$ dans le produit difféologique $X \times X$.

¹⁵ Et pourtant, contrairement à cette définition classique, la définition difféologique ne fait pas appel explicitement à la topologie.

¹⁶ Au sens difféologique 1.3.

¹⁷ Caractérisation équivalente: l'ensemble des arcs joignant deux points donnés est connexe (pour la difféologie induite de la difféologie fonctionnelle).

Revêtement universel

Tout espace difféologique connexe X possède un *revêtement simplement connexe*, dit **universel** ⁽¹⁸⁾. Le groupe structural correspondant ne dépend que de la difféologie de X ; on l'appelle **groupe d'homotopie** de X et on le note $\Pi^1(X)$ ⁽¹⁹⁾.

Si G est un groupe difféologique connexe, on peut construire son revêtement universel comme extension centrale de G par $\Pi^1(G)$ (qui est donc commutatif).

Les lacets de sommet donné tracés sur un espace difféologique connexe X constituent un espace difféologique dont le Π^1 ne dépend pas du choix du sommet; on le note $\Pi^2(X)$; il est nécessairement commutatif.

Les groupes d'homotopie suivants $\Pi^n(X)$ se définissent par récurrence.

Exemple

Le premier groupe d'homotopie de la composante neutre de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ est nul pour $n=1$, $\mathbb{Z}$ si $n=2$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n>2$ ⁽²⁰⁾.

3. Formes difféologiques

3.1. p-formes sur un espace difféologique

Formes sur un espace numérique

Une p -forme ω d'un *espace numérique* R se définit comme un champ de tenseurs antisymétriques de degré p dont les composantes

$$\omega(r)_{j\dots l}$$

sont différentiables sur R .

L'*image réciproque* de ω par une plaque numérique Q est une p -forme de $S = \text{Source}(Q)$, notée $Q^* \omega$, qui se définit par la formule :

$$[Q^* \omega](s)_{j\dots l} = \omega(Q(s))_{j'\dots l'} M_j^{j'} \dots M_l^{l'} \quad (\text{convention d'Einstein})$$

où M désigne la matrice jacobienne (1.1).

¹⁸ DONATO et IGLESIAS.

¹⁹ X est donc simplement connexe ssi $\Pi^1(X)$ est nul. Exercice: montrer que le groupe d'homotopie du tore de Denjoy-Poincaré T_α est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ (utiliser sa construction comme quotient de l'espace simplement connexe $\mathbb{R}$ par une fibration principale; ci-dessus 2.1.4).

²⁰ P. Donato, thèse. La classification des particules en *bosons* et *fermions*, qu'on formule habituellement avec l'homotopie du groupe de Poincaré (*isométries* de l'espace de Minkowski M) peut donc aussi se définir avec l'homotopie du groupe des *difféomorphismes* de M . Définition compatible donc avec la Relativité Générale.

Formes sur un espace difféologique

Une p -forme ω sur un *espace difféologique* X , ce sera une fonctionnelle sur les plaques P de X ⁽²¹⁾, dont le résultat sera noté $P * \omega$, et telle que:

pour toute plaque P de X , $P * \omega$ est une p -forme de $\text{Source}(P)$;
pour toute paramétrisation lisse Q de $\text{Source}(P)$:

$$[P \circ Q] * \omega = Q * [P * \omega]$$

Les p -formes difféologiques possèdent une structure vectorielle - caractérisée par la propriété:

$$\omega \mapsto P * \omega \text{ est linéaire pour toute plaque } P.$$

L'image réciproque de ω par une application différentiable $B: Y \rightarrow X$, c'est la fonctionnelle notée $B * \omega$ définie par

$$P * [B * \omega] = [B \circ P] * \omega$$

pour toute plaque P ; on constate que c'est une p -forme de Y , que $\omega \mapsto B * \omega$ est linéaire et que:

$$[B \circ C] * \omega = C * [B * \omega]$$

formule qui contient d'ailleurs l'axiome (b) ci-dessus - les plaques étant un cas particulier d'applications différentiables.

En particulier, si Y est une partie quelconque de X (munie de sa difféologie induite), on appelle *forme induite* par ω sur Y l'image réciproque de ω par l'induction de Y dans X .

Valeurs d'une p-forme

La valeur d'une p -forme ω en un point x , c'est la fonctionnelle qui associe à toute plaque P telle que $P(0) = x$ le tenseur $[P * \omega](0)$ ⁽²²⁾. Les valeurs en x constituent un espace vectoriel; deux p -formes qui ont même valeur en tout point de X sont égales; la valeur de $B * \omega$ en y ne dépend de ω que par sa valeur en $B(y)$.

Formes invariantes

Si ω est une p -forme sur un groupe difféologique G , et g un point de G (par exemple l'élément neutre), il existe une seule forme Ω définie sur G telle que:

$$\Omega \text{ est invariante }^{(23)};$$

²¹ Cette définition reste valable si X est un espace numérique - quand on le munit de la difféologie lisse.

²² Le choix du point 0 dans l'espace numérique est de pure commodité.

²³ Définition: l'image réciproque de Ω par toute translation à gauche $g \mapsto a g$ est égale à Ω .

Ω a même valeur que ω au point g .

3.2. Dérivée extérieure

Dérivée numérique

La dérivée extérieure d'une p -forme ω sur un espace numérique est la $(p+1)$ -forme $d\omega$ caractérisée par la formule

$$[d\omega](r)_{jkl\dots m} = \partial_j \omega(r)_{kl\dots m} - \partial_k \omega(r)_{jl\dots m} - \partial_l \omega(r)_{kj\dots m} - \dots - \partial_m \omega(r)_{kl\dots j} \quad (24)$$

Dérivée difféologique

On étendra la définition de $d\omega$ au cas où ω est une forme d'un espace difféologique par la règle:

$$P * [d\omega] = d[P * \omega] \text{ pour toute plaque } P;$$

la fonctionnelle $d\omega$ est une $[p+1]$ -forme de X ; la dérivation extérieure d commute avec l'image réciproque:

$$B * d\omega = d B * \omega;$$

d est une application linéaire et nilpotente: $dd\omega=0$ (25).

3.3. Invariants intégraux

Définition

Si $S: X \rightarrow Y$ est une subduction de X sur Y , une p -forme ω_X de X sera dite **invariant intégral** de S si elle est l'image réciproque par S d'une p -forme ω_Y de Y .

Alors ω_Y est déterminée par cette propriété; nous dirons que ω_X *descend* sur Y .

Dans ces conditions $d\omega_X$ est aussi un invariant intégral - puisque $d\omega_X$ descend sur $d\omega_Y$.

Exemple

Pour qu'une 1-forme ω d'un espace fibré principal descende sur la base, la condition (a,b) est nécessaire et suffisante:

(a) ω est invariante par l'action du groupe structural;

²⁴ ∂_j désigne la dérivation partielle par rapport à la composant r_j .

²⁵ D'où la cohomologie de DE RHAM sur un espace difféologique quelconque X : $HP(X)$, c'est l'espace vectoriel des p -formes fermées modulo les p -formes exactes.

La dérivée d'une forme invariante sur un groupe G est invariante; ce qui définit donc une cohomologie de G (dans le cas d'un groupe de Lie, c'est ce qu'on appelle *cohomologie de l'algèbre de Lie* de G).

(b) la forme induite par ω sur chaque fibre est nulle.

3.4. Formes simpliciales

jets de fonctions alternées

Soient X un espace difféologique, p un entier.

Les fonctions f qui sont différentiables sur le produit cartésien X^p , et antisymétriques, constituent un espace vectoriel $\text{Alt}_p(X)$. Si f est dans $\text{Alt}_p(X)$, et si A est une application différentiable de Y dans X , on définit de façon évidente l'image réciproque $A^\# f$, qui appartient à $\text{Alt}_p(Y)$.

On peut associer à chaque fonction f de $\text{Alt}_p(X)$ une $(p-1)$ -forme, que nous appellerons *jet* de f , de façon à respecter les règles suivantes:

L'image réciproque du jet est le jet de l'image réciproque;

Si X est un espace numérique, et si f est dans $\text{Alt}_{p+1}(X)$, son jet ω se calcule par:

$$f(r_0, r_0 + x_1, \dots, r_0 + x_p) = \frac{1}{p!} \omega(r_0)(x_1, x_2, \dots, x_p) + O(|x|^{p+1})$$

ω caractérise effectivement le jet d'ordre p de la fonction f en un point quelconque de la diagonale de X^{p+1} .

Le jet et l'image réciproque commutent:

$$\text{jet } A^\# f = A^* \text{jet } f$$

Formes simpliciales

Les p -formes possédant une telle fonction génératrice f seront dites *formes simpliciales*; toute 0-forme peut être considérée comme simpliciale, et identifiée à sa fonction génératrice (à une variable) selon une procédure habituelle dans le cas des variétés.

Les p -formes simpliciales ont leur propre cohomologie, à cause de la formule:

$$d \text{jet}(f) = \text{jet } \Delta f$$

où Δ désigne l'application de $A_p(X)$ dans $A_{p+1}(X)$ définie par :

$$\Delta f(x, x_1, x_2, \dots, x_p) = f(x_1, x_2, \dots, x_p) - f(x, x_2, \dots, x_p) - f(x_1, x, \dots, x_p) - \dots - f(x_1, \dots, x_{p-1}, x);$$

Δ est nilpotent et définit une cohomologie triviale.

4. Une suite exacte

Soit X un espace difféologique connexe.

Nous avons déjà défini le groupe de cohomologie de DE RHAM $H^1(X)$ (les 1-formes fermées modulo les 1-formes exactes); le groupe d'homotopie $\Pi^1(X)$; l'espace

vectorel $\text{Carde}(X)$ des classes de $\mathbb{R}$ -fibres principaux.

Ces objets apparemment hétéroclites sont pourtant reliés par l'existence d'une suite exacte d'applications linéaires ⁽²⁶⁾:

$$0 \rightarrow H^1(X) \rightarrow \text{Hom}(\Pi^1(X), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Carde}(X) \rightarrow \text{Liouv}(X) \rightarrow 0 ;$$

suite qui nous apprend par exemple que les 1-formes fermées sont exactes sur tout espace difféologique simplement connexe ($\Pi^1(X) = 0$), .

Cas des variétés

Un théorème de géométrie différentielle nous apprend par ailleurs que $\text{Carde}(X)$ est nul si X est une variété (tous les fibrés en droite de base X admettent une section). La suite exacte nous fournit donc un théorème de DE RHAM: l'isomorphisme des groupes $H^1(X)$ et $\text{Hom}(\Pi^1(X), \mathbb{R})$ dans le cas d'une variété.

Cas du tore de Denjoy-Poincaré T_α

La topologie de $X = T_\alpha$ est grossière, et par conséquent les fonctions différentiables sur X (0-formes), sont constantes (puisqu'elles sont continues). Donc pas de 1-forme exacte non nulle sur X . D'autre part la 1-forme invariante du groupe de Lie $(\mathbb{R}, +)$ est un invariant intégral de la projection sur la base X , ceci grâce au théorème 3.3. Ce qui fournit une 1-forme non nulle sur X ; on vérifie que toutes les autres lui sont proportionnelles, et par conséquent que $H^1(X) \approx \mathbb{R}$.

$\Pi^1(X)$ a été calculé en 2.4, et est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. la dimension de $\text{Hom}(\Pi^1(X), \mathbb{R})$ vaut donc 2. L'homomorphisme de DE RHAM est encore injectif, mais n'est plus surjectif.

La suite exacte interprète ce fait: la dimension de $\text{Carde}(X)$ est au moins égale à 1 - il existe un fibré en droite non trivial au dessus de X . Il se trouve qu'un tel fibré existe toujours, qui est une variété: il s'agit du tore ordinaire T^2 , fibré par un enroulement "oblique" de pente α . Il s'agit bien d'une fibration principale ⁽²⁷⁾. Il est évident qu'il s'agit d'une fibration non triviale, sinon T^2 serait difféomorphe au produit $T_\alpha \times \mathbb{R}$, et ça se saurait...⁽²⁸⁾.

En existe-t-il d'autres? Autrement dit, l'espace vectoriel $\text{Liouv}(X)$ qui achève la suite est-il nul ou non?

La réponse dépend des propriétés arithmétiques de α . Le calcul permet en effet de ramener le problème à une *équation fonctionnelle* qui a été étudiée par ARNOLD, MOSER, HERMAN (théorie des *petits diviseurs*). $\text{Liouv}(T_\alpha)$ est nul si α est un *nombre diophantien*.

L'équation d'Arnold est la clef du théorème KAM ⁽²⁹⁾ relatif à l'existence de tores invariants; théorème auquel la difféologie devrait permettre de donner une interprétation nouvelle.

²⁶ IGLESIAS, "Le troisième terme de la suite de de Rham des espaces difféologiques", preprint CPT87/P2052.

²⁷ Par exemple les fibres, parties denses de T^2 , sont difféomorphes à la droite quand on les munit de la difféologie induite.

²⁸ Par exemple $\mathbb{R}$ serait une image différentiable de T^2 , donc un espace compact.

²⁹ KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER.

5. Calcul des variations sur une variété

5.1. Difféologie contrôlée

Définitions

Soient X et Y deux espaces difféologiques; supposons que X soit une *variété séparée*. Soit P une plaque de $D(X,Y)$ pour la difféologie fonctionnelle (1.4). Nous dirons que P est une *puce* s'il existe un compact K de X en dehors duquel P "ne bouge pas" :

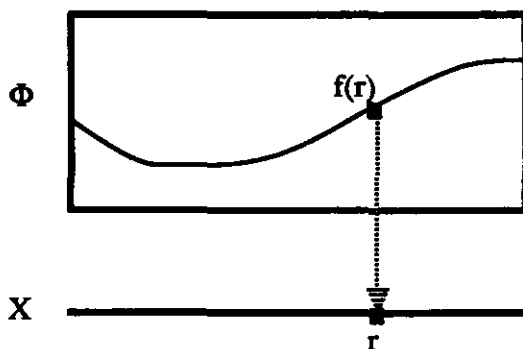
$$x \notin K \Rightarrow P(r)(x) = P(r')(x) \text{ quels que soient } r, r' \text{ dans } \text{Source}(P)$$

Nous appellerons **difféologie contrôlée** de $D(X,Y)$ (ou d'une partie F de $D(X,Y)$) la difféologie engendrée par les puces ⁽³⁰⁾.

On peut montrer que deux fonctions f_1 et f_2 qui sont homotopes (pour cette difféologie contrôlée) ne diffèrent que sur un compact de X .

Espaces de sections

Considérons maintenant une variété séparée X ; un fibré Φ au-dessus de X , au sens classique; notons F l'ensemble des sections différentiables f de Φ ; on suppose bien entendu le fibré tel qu'il existe de telles sections.



F est une partie de $D(X,\Phi)$ - et pourra donc être muni de la difféologie contrôlée. Et aussi n'importe quelle partie de F .

Un exemple: le fibré trivial $X \times X$, dont les sections sont les applications différentiables de X dans X . Le groupe $\text{Diff}(X)$ des difféomorphismes de X est une partie de l'espace des sections, que l'on peut donc contrôler; on obtient ainsi une *difféologie de groupe*, plus fine que la difféologie standard (2.1).

5.2. Répartitions

Définition

Soit toujours F un espace de sections, muni de la difféologie contrôlée. Nous appellerons **répartition** en un point f de F toute *valeur* en f d'une *1-forme* de F .

³⁰ Une plaque contrôlée, c'est la borne supérieure d'une famille de puces.

Une généralisation des distributions

Toute distribution T de l'espace numérique $\mathbb{R}^n$ s'identifie canoniquement à une répartition (du fibré en droites au dessus de $\mathbb{R}^n$) ⁽³¹⁾.

- La notion de répartition est une large généralisation de celle de distribution: par exemple le cas du fibré des p -formes sur une variété généralise les courants de DE RHAM; dans le cas des fibrés qui ne sont pas des fibrés vectoriels, les répartitions en un point constituent un espace vectoriel que l'on peut considérer comme "cotangent" à F .

5.3. problèmes variationnels

Densités et intégrales

Considérons le cas du fibré des densités sur une variété X . L'espace des sections - que nous allons noter Δ - sera muni de la difféologie contrôlée. Δ est évidemment un espace vectoriel.

Un résultat de 5.1 montre que deux sections homotopes ne diffèrent que sur un compact; si X n'est pas compacte, l'espace vectoriel Δ possède donc une infinité non dénombrable de composantes.

La composante Δ^0 de la section nulle est l'ensemble des sections à support compact. Par conséquent, si $\rho \in \Delta^0$, nous savons calculer l'intégrale

$$\int \rho$$

Sur Δ^0 , l'opération " $\int$ " est une fonction linéaire et différentiable (pour la difféologie contrôlée; c'est la *différentiation sous le signe somme*).

D'autre part le groupe $\text{Diff}(X)$ agit linéairement sur Δ^0 , et la forme linéaire $\int$ est invariante par cette action (c'est le *changement de variable dans les intégrales multiples*).

Si on pose:

$$\alpha(\rho_1, \rho_2) = \int \rho_2 - \rho_1 \quad \text{si } \rho_2 \text{ et } \rho_1 \text{ sont homotopes } ^{(32)}$$

0 dans le cas contraire

α est dans l'espace fonctionnel $\text{Alt}_2(\Delta)$; - son jet ω est par construction une 1-forme simpliciale.

ω est fermée et exacte; elle est invariante sur le groupe additif Δ ; sa valeur en 0 est

³¹ Une distribution T est, par définition, une fonction linéaire continue (pour une certaine topologie) sur la composante de 0 dans F ; on démontre qu'elle est différentiable (pour la difféologie contrôlée) et constitue donc une 0-forme; elle est caractérisée par la valeur en 0 de la 1-forme dérivée - c'est-à-dire par une répartition au point 0.

³² ρ_2 et ρ_1 ne diffèrent que sur un compact (voir 5.1).

une répartition qui caractérise l'opération $\int$.

Lagrangiens

Définition

Un **lagrangien**, au sens habituel (on dit aussi "densité lagrangienne"), associe à chaque section f d'un fibré sur une variété X une section $L(f)$ du fibré des densités de X (le cas le plus classique est celui où X est la droite réelle $\mathbb{R}$ - elle-même fibrée par $\mathbb{R}$; les densités se confondent alors avec les nombres réels. Le cas des "intégrales multiples" s'obtient en prenant $X = \mathbb{R}^n$).

On suppose d'habitude que $L(f)(x)$ ne dépend de f que par son jet d'ordre p en x , et en dépend différemment; alors L est une application différentiable de F dans

Δ - pour les difféologies contrôlées.

C'est cette seule propriété qui importe ici: nous pourrions appeler **lagrangien** toute application

$$F \rightarrow \Delta$$

qui est différentiable pour les difféologies contrôlées.

Action et dérivée variationnelle

Nous pouvons calculer l'image réciproque par un lagrangien L de la fonction α et de son jet ω - que nous noterons respectivement $\mathcal{A}$ et Ω . On trouve immédiatement:

$$\mathcal{A}(s_1, s_2) = \int L(s_2) - L(s_1) \text{ si } s_1 \text{ et } s_2 \text{ sont homotopes}$$

si bien que $\mathcal{A}$ s'interprète comme l'**action** - (considérée comme fonction antisymétrique à deux variables). Et puisque:

$$\Omega = L^* \omega,$$

on voit d'une part que Ω est une 1-forme fermée et exacte de F , d'autre part que

$$\Omega = L^* \text{jet } \alpha = \text{jet } L^* \alpha, \text{ donc que } \Omega \text{ est le jet de l'action } \mathcal{A}.$$

Ω est la **dérivée variationnelle** du lagrangien L . Elle est fermée et exacte quel que soit le lagrangien - parce que ω est fermée et exacte. La valeur de Ω en un point $f \in F$ est une répartition en f ; les sections f pour lesquelles cette répartition est nulle sont les **extrémales** du lagrangien L .

6. Difféologie et relativité

6.1. L'hypermespace

Espace des géométries

Soit X une variété séparée, connexe, non compacte. Désignons par G le groupe de ses difféomorphismes - muni de la difféologie contrôlée (5.1).

Notons F l'ensemble des métriques (pseudo)-riemanniennes de signature donnée sur X (lorentziennes pour fixer les idées); munissons F de la difféologie contrôlée.

Si f est une métrique prise dans F , et si a est un difféomorphisme, on sait définir la métrique image $a(f)$, qui est encore dans F ; f et $a(f)$ sont, par définition, isométriques; on dit aussi qu'elles définissent *la même géométrie* sur la variété X . Par conséquent le quotient

$$F / G$$

peut s'interpréter comme l'espace des géométries de X .

Une fibration principale

Considérons maintenant la *composante neutre* du groupe difféologique G , le sous-groupe distingué:

$$\Gamma = G^0$$

Il se trouve que l'action de G sur F est différentiable - donc aussi celle de Γ ; mais l'action de Γ possède une propriété supplémentaire: c'est une **fibration principale**.

esquisse d'une démonstration.

On remarque d'abord que Γ est contenu dans le groupe G_K des difféomorphismes de X à support compact (le groupe discret G_K / Γ est un invariant difféologique de la variété X ; son calcul est un problème d'*isotopie* qui semble assez difficile; heureusement nous n'en avons pas besoin ici).

Il suffit de montrer que l'action de G_K est une fibration principale de F . Cette action doit d'abord être libre - ce qui signifie que la seule isométrie a dont le support K soit compact est l'identité.

Ceci se prouve en choisissant un point x_0 en dehors de K , et un repère R_0 de l'espace tangent en x_0 . Tout point x de X peut être joint à x_0 par une chaîne finie d'arcs géodésiques (qu'on repérera donc chacun par un paramètre géodésique variant de 0 à 1), sur lesquels on peut successivement effectuer le transport parallèle du repère R_0 . En vertu du théorème d'unicité des solutions des équations différentielles, on constate que le point x est entièrement caractérisé par x_0 , R_0 , les composantes dans R_0 du vecteur tangent en x_0 au premier arc géodésique, et les coordonnées correspondantes attachées à chaque sommet.

Puisque a coïncide avec l'identité au voisinage de x_0 , a conserve x_0 et R_0 ; puisque a est une isométrie - et conserve aussi la connexion riemannienne, l'image par a de la chaîne est encore une chaîne géodésique, où les coordonnées caractérisant l'extrémité ont les mêmes valeurs que précédemment. Cette extrémité $a(x)$ est donc égale à x ; x étant arbitraire, a coïncide avec l'identité.

La démonstration du caractère principal de l'action de G peut s'achever en construisant une carte locale géodésique au voisinage de x et en utilisant la différentiabilité des solutions des équations différentielles *par rapport au système des conditions initiales et des paramètres*.

Définition de l'hyperespace

Nous appellerons **hyperespace** la base

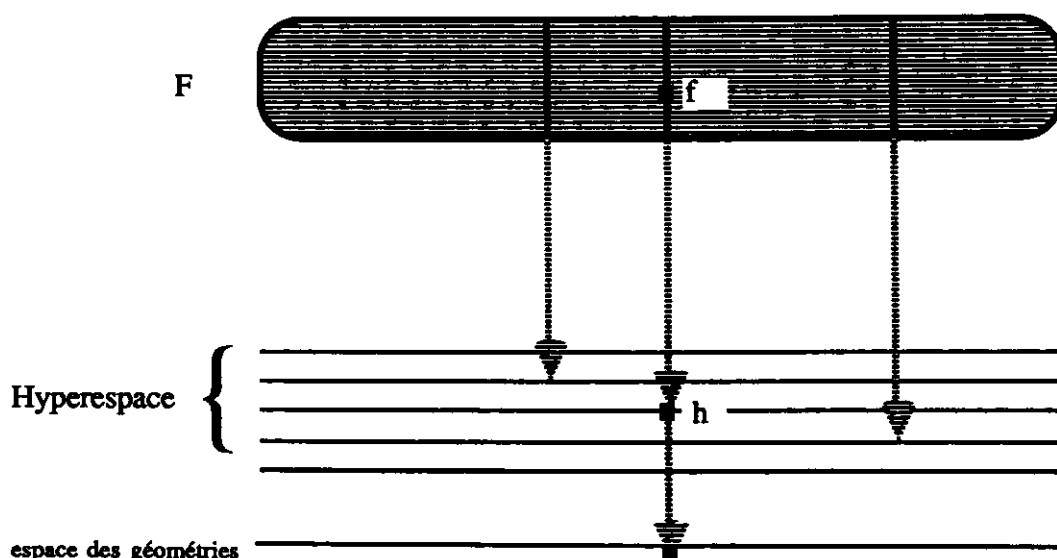
$$H = F / \Gamma$$

de ce fibré principal. La formule difféologique:

$$F / G \approx (F / \Gamma) / (G / \Gamma)$$

(où le signe $\approx$ indique deux espaces difféomorphes) montre que l'espace des géométries est le quotient de l'hyperespace H par un groupe discret (le

groupe des composantes de G). Un point h de H sera donc une "hypergéométrie" de la variété X .



Nous allons maintenant effectuer quelques constructions géométriques sur cet hyperspace - dans le cas "physique" où X est l'espace-temps.

6.2. Répartitions spatio-temporelles

Formes sur l'hyperspace

Soit τ une 1-forme de l'hyperspace H .

Parce que la projection $P: F \rightarrow H$ est une *subduction*, τ est caractérisée par sa relevée $\theta = P^*\tau$, qui est une 1-forme de F ; θ est par construction un invariant intégral de P .

Réciproquement, une 1-forme θ est un invariant intégral sous les deux conditions (a,b):

a) θ est invariante sous l'action du groupe $\Gamma = \text{Diff}(x)^0$;

b) θ est nulle sur les fibres;

ceci à cause d'un théorème concernant les espaces fibrés principaux (ci dessus 3.3).

Malgré le caractère "abstrait" de l'hyperspace et sa "dimension infinie", ses 1-formes sont donc des objets que l'on peut atteindre et avec lesquels on peut calculer.

Répartitions eulériennes

Remarquons que la condition (b) n'implique que les *valeurs* de θ aux différents points de F , c'est-à-dire les *répartitions* associées; toute répartition qui s'annule sur les fibres sera dite *eulérienne*.

On peut identifier une répartition T en f avec une fonctionnelle sur l'espace vectoriel des champs de tenseurs symétriques à support compact; fonctionnelle à la fois *linéaire et*

différentiable. Généralisant des méthodes classiques en calcul des distributions, on peut "localiser" ces fonctionnelles ; déterminer leur "support"; etc.

Le tenseur d'Euler-Einstein

- Le cas "complètement continu" est celui d'une fonctionnelle:

$$T(\delta g) = \int \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \text{ vol}$$

δg désignant la variable d'essai ⁽³³⁾, vol la valeur en f du lagrangien "volume riemannien", $T^{\mu\nu}$ un champ de tenseurs contravariants sur X que l'on supposera différentiable.

Le calcul montre que T est eulérienne ssi:

$$\bar{\partial}_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (\bar{\partial}_{\mu} : \text{dérivation covariante});$$

on reconnaît la formulation choisie par Einstein pour écrire en relativité les "principes de la mécanique", plus précisément les *équations d'Euler des milieux continus*: la notion mathématique de *répartition eulérienne* est donc un modèle pour la *répartition de matière dans l'espace-temps*.

Ces équations s'appellent aussi parfois "équations de conservation" - parce qu'on peut leur associer des grandeurs conservées - mais uniquement dans le cas où le champ de gravitation possède certaines symétries (voir ci-dessous 6.4).

Chute des corps

- Que se passe-t-il quand on sort du cas "complètement continu"?

Si la répartition T est définie par un tenseur-mesure dont le support est une courbe, la condition eulérienne implique qu'il existe un vecteur tangent P^{μ} permettant de définir T par la formule ⁽³⁴⁾:

$$T(\delta g) = \frac{1}{2} \int_R \delta g_{\mu\nu} P^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{dt} dt$$

et que la dérivée covariante de ce vecteur est nulle; d'où deux conséquences:

la courbe est une géodésique;

la quantité $P_{\mu} P^{\mu}$ est constante.

Si cette constante est positive, on pourra la noter m^2 ; on obtient donc à la fois la conservation de la masse m et la loi relativiste de la gravitation (*principe des géodésiques*): la chute des corps manifeste le caractère eulérien de la répartition de matière dans l'espace-temps.

Cette même condition fournit aussi les règles de collision entre particules, la description des particules à spin (voir ci-dessous 6.5), celle des cordes; etc.

³³ δg prend ses valeurs dans le fibré vectoriel $\hat{F}^0$ des tenseurs symétriques à support compact sur X.

³⁴ t désigne un paramètre arbitraire sur la courbe.

Tous ces "principes" de la physique ont donc une même interprétation platonicienne: *la dynamique de la matière n'est que l'ombre portée sur l'espace-temps par une répartition de l'hyperespace.*

6.3. Les équations d'Einstein

Lagrangiens équivariants

Un exemple de 1-forme de l'hyperespace est fourni par tout lagrangien L , défini sur F , qui est *équivariant* pour l'action simultanée sur F ⁽³⁵⁾ et sur Δ ⁽³⁶⁾ du groupe Γ ⁽³⁷⁾. Il est en effet immédiat que l'action $\mathcal{A}$ descend sur une fonction à deux points $\mathcal{A}_H$ de l'hyperespace H - ceci parce que la fonction $\int$ est invariante par l'action de $\text{Diff}(X)$, donc de $\text{Diff}(X)^0$. Le jet de $\mathcal{A}_H$ est une 1-forme ω de l'hyperespace, dont l'image réciproque par la subduction $F \rightarrow H$ est égale à la dérivée variationnelle Ω du lagrangien.

Cette dérivée variationnelle est toujours complètement continue, donc définie par un tenseur $T^{\mu\nu}$ vérifiant la conditions d'Euler-Einstein:

$$\bar{\partial}_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

Equations d'Einstein sur l'hyperespace

Ceci s'applique par exemple au lagrangien :

$$\frac{R - \Lambda}{\chi} \text{ vol} \quad (R : \text{courbure contractée de la section } s)$$

où Λ et χ sont des constantes universelles, et qui est équivariant (comme le lagrangien vol) par l'action d'un difféomorphisme quelconque. Le calcul montre que la dérivée variationnelle Ω est représentée par le tenseur contravariant :

$$T^{\mu\nu} = \frac{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}}{\chi}$$

($R^{\mu\nu}$: tenseur de Ricci) qui définit donc une 1-forme de l'hyperespace.

On reconnaît l'équation d'Einstein du champ de gravitation - qui s'interprète donc au niveau de l'hyperespace H : au point h décrivant l'hypergéométrie de l'univers,

³⁵ Espace des métriques de signature (+ - - -) sur l'espace-temps X .

³⁶ Espace des champs de densité de l'espace-temps.

³⁷ Composante neutre du groupe contrôlé des difféomorphismes de l'espace-temps.

la valeur de la forme ω coïncide avec la répartition de matière.

Points critiques

Comment décrire maintenant l'intégration de ces équations?

Plaçons-nous sur l'espace des sections F .

On suppose donnée la source du champ, c'est-à-dire une répartition eulérienne complètement continue T en un point f de F ; on peut canoniquement considérer T comme la valeur en f d'une 1-forme invariante sur le groupe difféologique $(\hat{F}, +)$; forme qui est automatiquement fermée; notons τ sa trace sur l'ouvert F .

Les solutions de l'équation sont, par définition, les points de F où la 1-forme:

$$\tau - \Omega$$

prend la valeur 0.

En fait $\tau - \Omega$ est une forme *exacte*, si bien que la résolution de l'équation d'Einstein consiste à trouver les *points critiques* d'une fonction différentiable sur F .

6.4. Application à la thermodynamique

Conservation eulérienne

Un argument trop long à développer ici ⁽³⁸⁾ montre comment construire, sous certaines conditions, des grandeurs conservées associées à une répartition eulérienne - dans le cas où la métrique g correspondante possède un groupe non discret d'isométries - qui est nécessairement un groupe de Lie. Ces grandeurs constituent une 1-forme invariante sur ce groupe - ou, si on préfère, un élément du dual de son algèbre de Lie.

Interprétation des états statistiques

Par ailleurs, les mouvements d'une particule de masse m qui gravite dans l'espace-temps X constituent une variété symplectique V de dimension six; à chaque point de V est associé une répartition eulérienne par la formule (6.2):

$$T(\delta g) = \frac{1}{2} \int_R \delta g_{\mu\nu} P^\mu \frac{dx^\nu}{dt} dt$$

avec $P_\mu P^\mu = m^2$.

On définit ainsi une injection de la variété V dans l'espace vectoriel des répartitions eulériennes.

Un *état statistique*, solution généralisée de l'équation de Liouville, c'est simplement une loi de probabilité sur V ; on peut lui associer la valeur moyenne de la répartition eulérienne associée - valeur moyenne qui est évidemment encore une répartition eulérienne ⁽³⁹⁾. Si celle-ci est complètement continue, l'état statistique correspondant pourra

³⁸ Voir "Thermodynamique et géométrie", "Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II", Bonn, 1977 - Springer Lect. Notes in Math. 676, 30 pages (1978).

³⁹ En fait, toutes les lois de probabilités sur V ne produisent pas ainsi une répartition moyenne: une condition de convergence est nécessaire, caractérisant la classe des états statistiques "localisables".

s'interpréter comme un *milieu continu*, décrit par une solution $T^{\mu\nu}$ des équations d'Euler.

On obtient ainsi une règle d'interprétation pour la **théorie cinétique des gaz** (la traduction de la *dispersion des vitesses* par une *pression* est incluse dans cette règle).

La mécanique statistique permet donc d'échapper au "paradoxe du trou noir": un état statistique peut fournir un $T^{\mu\nu}$ suffisamment régulier pour que l'équation d'Einstein possède une solution sans singularité - alors que les particules classiques, comme on sait, sont inaptes à jouer ce rôle ⁽⁴⁰⁾.

Conservation noethérienne

Plaçons nous dans l'approximation du champ de gravitation nul - c'est-à-dire de l'espace de Minkowski; le groupe des isométries (le groupe de Poincaré G_{10}) respecte la structure symplectique de V ; ceci permet de définir l'**application moment**, qui envoie la variété V dans le dual G_{10}^* de l'algèbre de Lie de G_{10} . Pour tout état statistique, nous connaissons alors deux grandeurs à valeur dans G_{10}^* : d'une part la *valeur moyenne du moment*, d'autre part la *grandeur conservée* associée à la répartition moyenne. On peut démontrer que ces deux grandeurs sont égales - en utilisant la notion de "diffusion gravitationnelle".⁽⁴¹⁾

Premier principe

Voici une conséquence importante de ce résultat: dans une région de l'espace-temps où se produisent des *phénomènes dissipatifs* - et où le formalisme symplectique tombe nécessairement en défaut ⁽⁴²⁾, la **valeur moyenne du moment** est conservée; ceci parce que le tenseur $T^{\mu\nu}$, défini par la mécanique statistique dans les régions non dissipatives, reçoit une *interpolation eulérienne* grâce aux équations d'Einstein - valables en toute région; la valeur moyenne du moment est donc *mémorisée par le champ de gravitation*. En particulier la composante temporelle de ce moment, qui est la valeur moyenne de l'énergie, n'est pas modifiée par la dissipation: c'est le contenu du **premier principe de la thermodynamique**. D'autres grandeurs au contraire, telles que le *spectre de l'énergie* ou l'*entropie* sont généralement modifiées par les processus dissipatifs.

Second principe et états de Gibbs

Ce second principe (la production positive d'entropie) montre que les états statistiques dans lesquels l'entropie a atteint la valeur maximum compatible avec la valeur moyenne du moment *ne peuvent plus subir de transitions dissipatives* - et constituent donc une sorte d'état asymptotique de la dissipation: ce sont les **états de Gibbs** - dans leur généralisation covariante. Ils sont indexés par une *température généralisée* prenant ses valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe d'isométries et repérables par le vecteur de Planck. Ils comprennent notamment les *mouvements circulaires uniformes* qui apparaissent effectivement comme les états asymptotiques de l'évolution des systèmes isolés en astrophysique.

⁴⁰ La mécanique quantique, elle aussi, produit des répartitions eulériennes qui peuvent être suffisamment régulières.

⁴¹ Référence de la note ³⁸.

⁴² Parce qu'il impliquerait la conservation de l'entropie.

6.5. Extension à l'électrodynamique

Répartitions électrodynamiques

X désigne toujours l'espace-temps - supposé séparé, connexe, non compact. Le champ considéré ici - ou plutôt le "potentiel", est mixte: gravitation, électromagnétisme ($g_{\mu\nu}$, A_ρ); la signature imposée de $g_{\mu\nu}$ fait encore de l'espace des sections F une partie ouverte de l'espace $\hat{F}$ des sections du fibré vectoriel obtenu en laissant quelconque $g_{\mu\nu}$. Une 1-forme en un point f de F peut se caractériser par une répartition T ; par exemple dans le cas complètement continu:

$$T(\delta g, \delta A) = \int \left[\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + J^\rho \delta A_\rho \right] \text{vol}$$

Nous savons comment la prolonger à $\hat{F}$ par une forme invariante; celle-ci induit sur F une 1-forme que nous noterons encore T .

$\text{Diff}(X)^0$ agit sur les sections; et aussi les transformations de jauge électro-magnétiques:

$$A_\rho \rightarrow A_\rho + \partial_\rho u \quad (u : \text{fonction réelle à support compact}).$$

Electrodynamique des milieux continus

Ces deux types de transformations engendrent un nouveau groupe Γ , le **groupe de jauge**, qui se trouve être un produit semi-direct, et que l'on munira de la difféologie contrôlée adéquate. L'action de Γ sur F est encore une fibration principale; sa base constituera donc un **nouvel hyperspace**, plus profond que le précédent.

Une répartition T du type ci-dessus sera eulérienne (style approfondi) ssi:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu + F_{\mu\nu} J^\nu = 0, \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (F = dA)$$

on reconnaît les "principes de l'électrodynamique des milieux continus" (**forces électro-magnétiques, conservation de l'électricité**); ces principes s'interprètent donc encore en termes d'hyperspace.

Electrodynamique des particules à spin

Cette pertinence peut aussi se tester dans des cas où la matière est condensée.

Considérons l'exemple d'une répartition supportée par une courbe (ligne d'univers d'une particule); en supposant qu'il s'agit d'une **distribution du 1er ordre**, la condition eulérienne fait apparaître automatiquement les grandeurs suivantes⁽⁴³⁾: charge électrique q , vecteur impulsion-énergie P , tenseur de spin S , tenseur moment électro-magnétique $\mathcal{M}$ (ces deux derniers antisymétriques); elles sont définies en chaque point de la ligne d'univers par la formule suivante caractérisant la répartition:

$$T(\delta g, \delta A) =$$

43 Voir "Modèle de particule à spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel" - Ann. Inst. H. Poincaré XX, 4, p.315-364 (1974). Dans ce travail, l'hyperspace n'était envisagé que comme objet formel.

$$\int \left[\frac{1}{2} \left[p^\mu \frac{dx^\nu}{dt} + \mathcal{M}^{\mu\rho} F_\rho^\nu \right] \delta g_{\mu\nu} + q \frac{dx^\mu}{dt} \delta A_\mu + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} \frac{dx^\rho}{dt} \partial_\mu \delta g_{\nu\rho} + \mathcal{M}^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \right] dt$$

d'autre part la condition eulérienne impose à ces objets les équations d'évolution suivantes:

$$q = \text{Cte}$$

$$\frac{dP_\sigma}{dt} = q F_{\sigma\rho} \frac{dx^\rho}{dt} + \frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \partial_\sigma F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu,\rho\sigma} S^{\mu\nu} \frac{dx^\rho}{dt}$$

$$\frac{dS^{\mu\nu}}{dt} = p^\mu \frac{dx^\nu}{dt} - p^\nu \frac{dx^\mu}{dt} - \mathcal{M}^{\mu\rho} F_\rho^\nu + \mathcal{M}^{\nu\rho} F_\rho^\mu$$

les dérivations sont covariantes chaque fois qu'il le faut; $R_{\mu\nu,\rho\sigma}$ désigne le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel.

Universelles, ces équations ont vocation à l'être. Mais à l'évidence *elles ne sont pas déterministes*: c'est en les complétant par des équations d'état phénoménologiques qu'on peut caractériser chaque type de particule et construire ainsi des systèmes déterministes (de même que les équations universelles de la dynamique ou de l'électrodynamique des milieux continus requièrent des équations d'état pour devenir prédictives).

Recours à l'expérience

Les équations universelles sont-elles vérifiées par l'expérience? Indépendamment des souhaits du géomètres, le physicien doit y croire, puisqu'elles ne constituent qu'une transposition des lois de l'électrodynamique "molle" au cas des états "condensés" de la matière.

Il se trouve que le terme de courbure gravitationnelle qui intervient dans ces équations est négligeable au voisinage de la Terre - et ne peut donc pas être testé. Les expériences les plus précises ont été faites dans le cas d'un champ électromagnétique constant (dans une région de l'espace-temps), ce qui annule le terme

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}^{\mu\nu} \partial_\sigma F_{\mu\nu}$$

de la deuxième équation. Il s'agit des mesures du moment magnétique de l'électron ou du muon; paradoxalement, une telle expérience où n'intervient aucun effet quantique a donné l'une des vérifications les plus précises d'une prédiction de l'électro-dynamique quantique (le moment magnétique anormal).

Dans l'expérience de Stern et Gerlach, au contraire, ce terme joue un rôle prépondérant : comme chacun sait, c'est là qu'un effet quantique irréductible a été mis en évidence pour la première fois. Bien entendu, la quantification de ces équations dépasse le cadre du présent exposé; disons simplement que l'on peut assigner à une particule à spin une équation d'état conférant à l'espace des mouvements une structure symplectique, et que la quantification géométrique conduit - avec les hypothèses simplificatrices nécessaires, à l'équation de

Dirac.

Electrodynamique statistique

Revenons au cas des particules à spin non quantiques; la mécanique statistique va pouvoir se formuler simplement - parce que comme précédemment la variété des mouvements se plonge dans l'espace vectoriel des répartitions eulériennes; ceci permet d'associer à un état statistique une répartition moyenne, toujours eulérienne, qui pourra être complètement continue.

Ainsi une simple statistique d'électrons à spins alignés est apte à fournir une description macroscopique des aimants; cette procédure décrit non seulement l'aimantation, mais aussi la magnétostriction ainsi que l'effet gyromagnétique; ce dernier permettant de mesurer macroscopiquement le coefficient gyromagnétique des électrons individuels (⁴⁴).

Equations d'Einstein-Maxwell

Tout cela a pu se faire *sans avoir besoin de connaître les équations de champ*; celles-ci s'obtiennent ensuite avec un lagrangien bien connu, à savoir:

$$\frac{R + \epsilon F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \Lambda}{\chi} \text{ vol}$$

où ϵ , Λ , χ sont des constantes universelles. Ce lagrangien est équivariant; l'action est donc invariante de jauge, elle descend sur l'hyperespace - de même que la dérivée variationnelle Ω .

Les équations de champ s'écrivent encore:

$$\mathcal{T} - \Omega = 0$$

$\mathcal{T}$ étant la 1-forme de F associée à la répartition de matière et d'électricité; l'inconnue, c'est le *champ*, c'est-à-dire la section f où la valeur de la forme exacte $\mathcal{T} - \Omega$ s'annule.

Le calcul montre qu'elles combinent les équations de Maxwell (où J^μ s'interprète bien comme courant électrique) et les équations d'Einstein (où le tenseur $T^{\mu\nu}$ est augmenté du tenseur de Maxwell-Poyntig). Les résultats précédents impliquent que les conditions eulériennes complètes:

$$\partial_\mu T^\mu_\nu + F_{\mu\nu} J^\nu = 0, \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

sont une conséquence nécessaire des équations de champ - simplement parce que le lagrangien est équivariant. Cette implication rend d'ailleurs inutile la vérification par le calcul.

Modèles phénoménologiques

Des situations plus compliquées - et plus phénoménologiques - peuvent se traiter dans le même cadre géométrique. Par exemple le cas d'un milieu continu élastique se décrit en joignant aux variables de champ une application de l'espace-temps dans une variété Q_3 de

⁴⁴ Expérience de DE HAAS.

the first of these is the fact that the
the second is the fact that the
the third is the fact that the

THE SECOND OF THESE

the first of these is the fact that the
the second is the fact that the
the third is the fact that the

THE THIRD OF THESE

the first of these is the fact that the
the second is the fact that the
the third is the fact that the

the first of these is the fact that the
the second is the fact that the
the third is the fact that the

dimension 3 (le "body"); l'action du groupe de jauge $\text{Diff}(X)^0$ est évidente. Les équations de champ dérivent d'un lagrangien équivariant et donnent une théorie relativiste dont l'approximation galiléenne contient l'élasticité non linéaire aussi bien que les équations des fluides parfaits.

Le milieu électriquement chargé peut se décrire par une densité de la variété Q_3 . Mais attention! le lagrangien responsable de l'interaction électromagnétique *n'est pas équivariant* par le groupe de jauge complet Γ ; c'est seulement l'action $\mathcal{A}$ qui descendent sur l'hypermespace profond - ainsi donc que la dérivée variationnelle Ω .

Recours à la cinquième dimension

Un dernier point: comment démontre-t-on que l'action du groupe de jauge sur les potentiels fournit une *fibration principale* de F ?

On peut y arriver en appliquant la technique 6.1 à la variété X^5 de Kaluza-Klein, produit cartésien de l'espace-temps X^4 par le cercle, munie d'une métrique lorentzienne caractérisant à la fois les potentiels gravifique et électromagnétique de X^4 . Le groupe de jauge Γ devient un sous-groupe connexe de $\text{Diff}(X^5)$; on utilise le fait que la restriction d'une fibration principale à un sous-groupe quelconque donne encore une fibration principale.

L'utilisation d'une telle démonstration n'implique évidemment pas une théorie unitaire du type Kaluza-Klein, mais ne l'exclut pas...

7. Théories de jauge

Des objets du type "hypermespace" peuvent aussi apparaître dans les diverses théories de jauge; voir notamment à ce sujet les travaux de DUVAL, HORVATHY, WEINSTEIN, STERNBERG, GUILLEMIN.

L'outil difféologique devrait permet de dépasser le stade formel auquel on se place souvent dans l'étude des théories de jauge. Un seul exemple: l'ambiguïté de Gribov, impossibilité de construire des sections globales d'un fibré de connexions, avait été traité topologiquement - en utilisant une compactification non-physique de l'espace de Minkowski. Or le problème peut se traiter sans hypothèse de ce genre, en utilisant la version difféologique de la *suite exacte d'homotopie* ⁽⁴⁵⁾. L'impossibilité est ainsi établie dès que l'un des groupes d'homotopie du groupe de jauge n'est pas nul (par exemple le groupe Π^2 dans le cas $SU(2)$).

⁴⁵ IGLESIAS, thèse.