QUANTIFICATION GEOMETRIQUE *

Jean-Marie SOURIAU**

Centre de Physique Théorique***
CNRS - Luminy - Case 907
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9 (France)

CPT-86/P.1938

* Colloque International CNRS, Géométrie et Physique, Paris, 16-20 Juin 1986

** Université de Provence

*** Laboratoire Propre du CNRS - LP 7061

TABLE

INTRODUCTION

ANALYSE HARMONIQUE

1 , 1 Fonctions de type positif - construction GNS - fonctions conditionnelles
1 , 2 Etats - espace des états - irréductibilité - continuité
1 , 3 Espaces et états statistiques - prolongement linéaire - spectre - transport
1 , 4 Exemples d'états statistiques - état de Dirac - probabilités

ESPACES ET GROUPES DIFFEOLOGIQUES

2 , 1 Espaces difféologiques - difféologies -catégorie
2 , 2 Transports de difféologies - image - image réciproque - subduction - induction - somme - produit
2 , 3 Homotopie des espaces difféologiques - composantes - arcs - lacets - groupes d'homotopie
2 , 4 Groupes difféologiques - catégorie - sous-groupes - quotients - espaces homogènes
2 , 5 Exemples de groupes difféologiques - tore de Denjoy-Poincaré - groupes de difféomorphismes
2 , 6 D-actions - difféologie de Klein - espaces de Klein
2 , 7 Fibrés principaux -
2 , 8 Revêtements - revêtement universel d'un espace difféologique - d'un groupe difféologique
2 , 9 Difféologie forte - rayons d'un groupe - difféologie d'espace vectoriel

p-FORMES DIFFEOLOGIQUES

3 , 1 p-formes - p-formes classiques - p-formes difféologiques - image réciproque - linéarité
3 , 2 Valeurs d'une forme - cas des 0-formes
3 , 3 Calcul de Cartan difféologique - dérivée extérieure - produit intérieur - dérivée de Lie

PREQUANTIFICATION

4 , 1 Formes invariantes - représentation coadjointe
4 , 2 Espaces quantiques - forme quantique - quantomorphismes - application moment - variétés quantiques
4 , 3 Groupes dynamiques - orbite - caractère
4 , 4 Quantification des orbites - exemple du groupe de Heisenberg
4 , 5 Cas des orbites simpliciales - orbites nilpotentes, entières, quantifiables
4 , 6 Hamiltoniens

QUANTIFICATION

5 , 1 Etats quantiques - axiomatique - loi de probabilité associée à une fonction hamiltonienne bornée
5 , 2 Représentations quantiques - vecteurs d'état - états mélangés - opérateurs self-adjoints - irréductibilité
5 , 3 Existence d'états quantiques - spin, représentations de U(2) et SU(2) - relations de commutation, relations d'incertitude, représentation de Schrödinger en dimension finie ou infinie

Introduction

La mécanique quantique, qui s'est constituée empiriquement au fil des ans, se présente aujourd'hui - tout au moins dans les manuels - comme une discipline cohérente.

Mais la lecture des traités produit souvent un certain malaise: qu'il s'agisse de livres inspirés comme ceux de Dirac ou de Feynman, ou de manuels plus scolaires, les concepts proposés au lecteur ont une apparence de rigueur, les déductions ressemblent à des théorèmes - mais des théorèmes dont les hypothèses seraient toujours implicites.

Il est normal qu'un mathématicien qui rencontre ce genre de raisonnement pense "c'est de la physique", et passe à autre chose. Au mieux, à développer des théories mathématiques qui sont suggérées par les textes des physiciens.

En retour, les physiciens considèrent avec une certaine indulgence cette "métaphysique quantique", mais en tirent rarement profit: A quoi bon la théorie spectrale ou la théorie des distributions, si on savait déjà calculer avant?

La contradiction interne n'est pas un obstacle à la pratique du physicien, et apparaît même parfois comme un gage de fécondité. Après tout, la logique montre que tout peut sortir d'une théorie contradictoire. . .

Ce malentendu qui dure depuis plus de soixante ans, faut-il s'y résigner? Si la matière possède souvent, à moyenne ou à grande échelle, la mystérieuse propriété d'être mathématisable, rien ne garantit qu'il en soit de même à l'échelle atomique. Et même dans ce cas, si la mathématisation était encore trop loin de nos possibilités, serait-il raisonnable de s'y obstiner?

Le danger de cette hypothèse, c'est que l'existence supposée d'une théorie inaccessible peut devenir un alibi de paresseux. Il n'est pas nécessaire d'espérer découvrir une théorie définitive pour entreprendre l'analyse conceptuelle des pratiques qui réussissent, et pour élaborer une mise en forme provisoire.

Le lecteur trouvera ci-dessous un essai dans cette direction - à un stade préliminaire. Pour des raisons d'encombrement, le présent travail adopte le style "fascicule de résultats", qui permet au moins de suivre pas à pas la construction du modèle. Les démonstrations des résultats non classiques ont été ou seront données ailleurs.

Le point de départ de la quantification géométrique est la notion de variété quantique Ξ, fibrée en cercle au dessus d'une variété symplectique X. Nous montrons que X est toujours une orbite coadjointe, certes pas d'un groupe de Lie, mais d'un "groupe difféologique" G : la théorie des espaces et groupes difféologiques, développée ailleurs, est ici rappelée brièvement. Elle permet d'ailleurs d'élargir le cadre des variétés quantiques ("espaces quantiques").

La notion de fonction hamiltonienne, qui reste valable dans ce cadre élargi, permet de définir une nouvelle classe d'objets - les "états quantiques". Il s'agit de fonctions complexes définies sur le groupe G, et vérifiant un double jeu d'inégalités (ci-dessous, (5,1)); une telle définition permet d'appliquer à ces objets les ressources de l'analyse harmonique et de l'analyse convexe.

L'existence d'états quantiques est souvent problématique; mais ils jouissent d'assez de propriétés "héréditaires" pour que l'existence d'un seul d'entre eux permette d'en construire beaucoup d'autres.

Quelques exemples sont développés, en particulier dans leurs aspects "calculatoires". Le lecteur pourra reconnaître, au fil d'un développement purement mathématique, des allusions à divers objets de physique quantique: espaces de Hilbert, représentations unitaires, vecteurs d'état, opérateurs densité, états de Gibbs et de Hartree-Fock, opérateur hamiltonien, relations d'incertitude, expérience de Stern et Gerlach, etc.

Mais, comme nous l'avons dit, cette analyse n'est que provisoire; la théorie doit être complétée mathématiquement et confrontée à d'autres situations matérielles où apparaissent des effets quantiques.

1) Analyse harmonique

(1,1) <u>Fonctions de type positif</u>

a)

Soit G un groupe, m une fonction $G \to \mathbb{C}$.

Une autre fonction n sera dite **subordonnée** de m s'il existe une famille finie de constantes complexes C_j et d'éléments g_j du groupe G tels que:

$$n(g) = \sum_{j,k} \overline{C_j}\, C_k\, m(g_j^{-1} g\, g_k) \quad \forall g \in G$$

La relation de subordination est réflexive et transitive.

b) <u>définition</u>

m est dite **de type positif** si toutes les subordonnées de m prennent une valeur ≥ 0 en l'élément neutre e du groupe. Il est donc clair que toute subordonnée de m est aussi de type positif.

Les définitions suivantes (c et d) sont équivalentes à (b):

c)

m est de type positif ssi, $\forall g_j \in G$, la matrice dont les éléments sont

$$m(g_j^{-1} g_k)$$

est hermitienne positive.

d) ♫ <u>construction de Gelfand-Naimark-Segal</u> :

m est de type positif ssi il existe un **espace de Hilbert** $\mathcal{H}$, une **représentation** u de G dans le **groupe unitaire** $U(\mathcal{H})$ et un vecteur ψ de $\mathcal{H}$ tels que:

$$m(g) = \langle \psi , u(g)\, \psi \rangle \quad \forall g$$

On peut de plus supposer que ψ est un vecteur **cyclique** (: l'espace vectoriel engendré par les $u(g)\psi$ quand g parcourt G est dense dans $\mathcal{H}$); avec cette condition le triplet $\mathcal{H}, u, \psi$ est caractérisé par la fonction m <u>à une équivalence unitaire près</u>.

e)

Toute fonction m de type positif vérifie $\forall g \in G$:

$$m(e) \geq 0$$

$$|m(g)| \leq m(e)$$

$$m(g^{-1}) = \overline{m(g)}$$

f)

Le produit de deux fonctions de type positif est de type positif

g)

Une fonction n, complexe sur G, est dite **conditionnellement de type positif** si :

$$n(g^{-1}) = \overline{n(g)}$$

$$\sum_k C_k = 0 \quad \text{entraîne} \quad \sum_{j,k} \overline{C_j}\, C_k \; n(g_j^{-1} g_k) \geq 0$$

cette propriété est équivalente à la suivante:

$\forall a \geq 0$, la fonction m : $m(g) = \exp(a\, n(g))$ est de type positif.

<u>Exemple</u>:

Soit X un espace de Hilbert (ou préhilbertien) complexe; décomposons la forme hermitienne $\langle\rangle$ en g et σ réelles:

$$\langle x,y\rangle = g(x,y) + i\,\sigma(x,y)$$

Sur l'ensemble $G = X{\times}\mathbb{R}$, on peut choisir la loi de groupe

$$(x,s)\,(x',s') = (x+x',\, s + s' + \sigma(x,x'))$$

Un calcul élémentaire montre que la fonction n:

$$n(x,s) = is - \lambda\langle x,x\rangle$$

vérifie, si la somme des C_k est nulle:

$$\sum_{j,k} \overline{C_j}\; C_k\, n((x_j, s_j)^{-1}(x_k, s_k)) = (\lambda - \tfrac{1}{2})\,\Big\|\sum_k C_k\, x_k\Big\|^2 + (\lambda + \tfrac{1}{2})\,\Big\|\sum_k \overline{C_k}\, x_k\Big\|^2$$

donc qu'elle est conditionnellement de type positif ssi $\lambda \geq 1/2$; la fonction m:

$$m(x,s) = \exp(\; is - \lambda\langle x, x\rangle)$$

est alors de type positif sur G.

(1,2) <u>Etats</u>

a)

Nous appellerons **états** d'un groupe G les fonctions de type positif sur G qui sont normalisées par la condition:

$$m(e) = 1.$$

♫ Tout état m vérifie, quels que soient g, g' dans G:

$$|m(g\,g') - m(g)\,m(g')| \leq \sqrt{1 - |m(g)|^2}\; \sqrt{1 - |m(g')|^2}$$

$$|m(g) - m(g')| \leq \sqrt{2\, \mathcal{Re}(1 - m(g^{-1} g'))}$$

b)

Soit $\mathbf{B}(G)$ l'espace de Banach des fonctions complexes bornées sur G, muni de la norme uniforme.

$\mathbf{B}(G)$ est le dual d'un espace de Banach (à savoir l'espace $\mathbf{L}^1(G)$ si on munit G de la topologie discrète).

Pour la <u>topologie faible</u> de $\mathbf{B}(G)$, les fonctions $\mathbf{B}(G) \to \mathbb{C}$:

$$b \longmapsto b(g)$$

sont <u>continues</u> ($\forall g \in G$) ; toute partie bornée de $\mathbf{B}(G)$ qui est fermée pour la topologie faible est <u>compacte</u> pour cette topologie (théorème de Tychonov-Alaoglu).

L'ensemble $\mathcal{K}$ des états de G est une partie <u>convexe</u> et <u>bornée</u> de $\mathbf{B}(G)$;

$\mathcal{K}$ est <u>fermé pour la topologie uniforme et pour la topologie faible</u>, et par conséquent <u>faiblement compact</u>.

c) <u>Irréductibilité</u>

Soit m un état d'un groupe G. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

* m est un **point extrêmal** du convexe $\mathcal{K}$ des états;
* la représentation u associée à m (Cf.(1,1,d)) est **irréductible**.

Grâce au théorème de Krein-Milman, $\mathcal{K}$ est le plus petit convexe faiblement fermé de $\mathbf{B}(G)$ contenant ces points extrêmaux.

d) <u>continuité</u>

Si G est un groupe topologique, un état de G dont la partie réelle est continue au point e est **uniformément continu**; ces **états continus** forment une **face** du convexe des états:

* les états continus forment un convexe;
* si la demi-somme de deux états est continue, chacun l'est.

(1,3) <u>Espaces et états statistiques</u>

a)

Nous appellerons **espace statistique** tout ensemble X muni d'un groupe G de fonctions

$$g : X \to \mathbb{T}$$

($\mathbb{T}$ = **tore** :=groupe U(1) des nombres complexes de module 1); G s'appellera **groupe statistique** de X.

b)

Soit (X, G) un espace statistique; nous appellerons **fonctions d'essai** sur X les limites uniformes de combinaisons linéaires complexes d'éléments de G; il est clair que l'ensemble des fonctions d'essai est une <u>C*-algèbre commutative</u>.

c) <u>Théorème:</u>

Soit (X,G) un espace statistique; nous appellerons **état statistique** de X toute fonction $m : G \to \mathbb{C}$ qui vérifie, pour toute famille finie $c_k \in \mathbb{C}$, $g_k \in G$:

$$0 \leq \sum_{j,k} \overline{c}_j\, c_k\, m(g_j^{-1} g_k) \leq \sup_{x \in X} \Big| \sum_k c_k\, g_k(x) \Big|^2$$

ainsi que:

$$m(\mathbb{1}) = 1$$

($\mathbb{1}$:= fonction constante prenant la valeur 1 = élément neutre de G).

L'ensemble des états statistiques de X est une **face faiblement compacte** du convexe des états de G.

d) <u>Prolongement linéaire</u>:

♫

Pour qu'une fonction complexe m définie sur G soit un <u>état statistique</u>, il faut et il suffit qu'il existe une fonction μ telle que:

* μ prolonge m à l'ensemble des fonctions d'essai f;

* μ est $\mathbb{C}$-linéaire;
* μ est positive:

$$\mu(f) \geq 0 \quad \text{pour toute } f \geq 0\,;$$

* μ est bornée, et de norme 1:

$$|\mu(f)| \leq \sup_x |f(x)|$$

$$\mu(\mathbb{1}) = 1\,;$$

ce prolongement est <u>unique</u>.

e) <u>spectre</u>

Du fait que les fonctions d'essai constituent une C*-algèbre commutative, résulte l'existence d'un espace topologique compact S et d'une application $X \to S$, tels que toute fonction d'essai f se factorise d'une seule façon via une fonction continue f* sur S:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ & \searrow \quad \nearrow_{f^*} & \\ & S & \end{array}$$

$f \to f^*$ étant une bijection de l'espace des fonctions d'essai sur celui des fonctions continues sur S (S est le "spectre" de l'algèbre au sens de Gelfand). Les états statistiques de X peuvent ainsi s'identifier aux mesures positives de masse 1 sur S.

f) <u>transport</u>

Soient (X,G) et (X',G') deux espaces statistiques. Appelons **morphisme statistique** toute application $A: X \to X'$ telle que:

$$g' \in G' \implies g' \circ A \in G\,;$$

il est immédiat qu'on définit ainsi une "catégorie des états statistiques"; que l'**image** par A d'un **état statistique** m de X, définie par:

$$A(m)(g') = m(g' \circ A) \qquad \forall\, g' \in G'$$

est un état statistique de G', et que les états statistiques deviennent ainsi des objets "contravariants":

$$(B \circ A)(m) = B(A(m))$$

g)
Pour tout espace statistique (X,G), la non-séparation de deux points de X par les éléments de G est une équivalence, qui définit un **espace statistique quotient** Q; les états statistiques de X passent sur Q.

(1,4) exemples d'états statistiques

a) Dirac

Pour tout espace statistique (X,G), et tout point $x \in X$, l' "état de Dirac" $\delta(x)$:
$$\delta(x)(g) = g(x) \qquad \forall g \in G$$
est un état statistique.

b) Probabilités

Soit X un espace topologique localement compact; on choisit comme groupe statistique le groupe G des applications continues $X \to \mathbb{T}$.

Si μ est une **loi de probabilité** sur X (mesure positive de masse 1), la fonctionnelle m:
$$m(g) = \int_X g(x)\, d\mu(x)$$
est un état statistique, caractérisant la mesure μ.

Mais il peut en exister d'autres - qui s'obtiennent par l'axiome du choix; si par exemple X est l'espace discret $\mathbb{N}$, le caractère $\chi(g)$, limite de g sur un ultrafiltre de $\mathbb{N}$ non convergent, est un état statistique.

c)
Soit X un groupe abélien localement compact; choisissons comme groupe statistique G le **groupe dual**, c'est-à-dire le groupe des caractères continus de X.

♫ Le théorème de Bochner-Raikov nous apprend que la transformation de Fourier:
$$m(g) = \int_X g(x)\, d\mu(x)$$
met en bijection:

* les états m de X qui sont continus pour la topologie de Pontriagin de G;
* les lois de probabilité μ sur X.

Le résultat (1,3,d) montre que dans ce cas tous les états continus sont des états statistiques.

Dans le cas particulier $X = \mathbb{R}^n$, X s'identifie topologiquement avec G en posant, $\forall\, \omega, x \in \mathbb{R}^n$:
$$\omega(x) = e^{i\langle\omega,x\rangle}$$
si bien que la transformation de Fourier s'écrit classiquement:
$$m(\omega) = \int e^{i\langle\omega,x\rangle}\, d\mu(x)$$
m est la "fonction caractéristique" de la loi de probabilité μ.

La formule classique:
$$\int_{R^n} \exp(i\langle\omega,x\rangle - \|x\|^2/2)\, dx = [2\pi]^{n/2} \exp(-\|\omega\|^2/2)$$
montre que la fonction $\omega \longmapsto \exp(-|\omega|^2/2)$ est un état statistique; le théorème (1,3,d), ou un calcul direct, montre donc que :
$$0 \le \sum_{j,k} \overline{C_j}\, C_k \exp(-\|\omega_k - \omega_j\|^2/2) \le \sup_x \Big| \sum_k C_k \exp(i\langle\omega_k, x\rangle) \Big|^2$$

2) Espaces et groupes difféologiques

(2,1) Espaces difféologiques

a) Bourbachique des plaques

Soit X un ensemble.
On appellera **difféologie** de X la donnée, pour tout entier positif p, d'une famille d'applications appelées **p-plaques** de X, telles que:

i) chaque p–plaque est une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans X;

ii) l'ensemble des images des plaques recouvre X;

iii) si des p–plaques ont un prolongement commun, le plus petit de ces prolongements est une p–plaque;

iv) si P est une p–plaque de X et A est une application de classe C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^{p'}$ dans def(P), P•A est une p'-plaque.

Exemple: Si M est une variété de classe C^∞, on peut munir M de sa **difféologie de variété**, celle dont les p–plaques sont les applications de classe C^∞ d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans M. Ceci vaut en particulier pour les ouverts des espaces numériques $\mathbb{R}^n$ eux-mêmes.

b)

Si X et X' sont chacun munis d'une difféologie, on dira **différentiables** les application A: X→ X' telles que :

$$P \text{ : plaque de } X \implies A \cdot P \text{ : plaque de } X' \text{ ;}$$

ce sont les flèches de la **catégorie des espaces difféologiques**.

Les isomorphismes de cette catégorie s'appelleront **difféomorphismes**.

(Bien entendu ces définitions sont compatibles avec les définitions usuelles dans le cas des variétés).

Réciproquement, si X est un objet de la catégorie, sa difféologie est caractérisée par la propriété suivante: ses p–plaques sont les applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans X qui sont différentiables.

(2,2) <u>Transports de difféologies</u>

a)

Si X_1 et X_2 désignent deux difféologies d'un même ensemble X, la première difféologie sera dite **plus fine** que la seconde si l'application identique de X_1 dans X_2 est différentiable - c'est-à-dire s'il y a moins de plaques dans la première.

Cette finesse est une **relation d'ordre** sur les difféologies de X;

la difféologie **la plus fine** de X sera dite **discrète** (ses p–plaques sont les applications localement constantes d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans X).

<u>Deux paires duales:</u> (b)-(b*), (c)-(c*)

b)

♫

Si X est un espace difféologique, et A une application de X sur un ensemble X', la <u>plus fine</u> difféologie de X' pour laquelle A soit <u>différentiable</u> s'appellera **image** par A de la difféologie de X (ses p–plaques sont les $\sup_k(A \cdot P_k)$, P_k : p–plaques de X; elles sont donc "**localement relevables**").

On appellera **subduction** d'un espace difféologique X dans un espace difféologique X' tout surjection A: X→ X' telle que la difféologie de X' soit l'image par A de celle de X. Alors une application Q: X'→Y est différentiable ssi Q•A est différentiable.

Ainsi <u>tout quotient</u> X' d'un espace difféologique X par une relation d'équivalence peut être muni de la **difféologie quotient** - celle pour laquelle la surjection canonique X→X' est une subduction.

b*)

♫

Si X est un ensemble, et A une application de X dans un espace difféologique X', la <u>moins fine</u> difféologie de X pour laquelle A soit <u>différentiable</u> s'appellera **image réciproque** par A de la difféologie de X (ses p–plaques sont les P telles que A•P soit une p–plaque de X').

On appellera **induction** d'un espace difféologique X dans un espace difféologique X' toute injection A: X→ X' telle que la difféologie de X soit l'image réciproque par A de celle de X'. Alors une application P: Y→ X est différentiable ssi A•P est différentiable.

Ainsi <u>toute partie</u> X d'un espace difféologique X' peut être muni de la **difféologie induite** - celle pour laquelle l'injection canonique X→X' est une induction.

c)

<u>Toute somme</u> $X = \Sigma X_k$ d'espaces difféologiques peut être munie de la **difféologie somme**, la <u>plus fine</u> pour laquelle les injections canoniques $X_k \to X$ soient <u>différentiables</u>; ce sont alors des <u>inductions</u>.

c*)

Tout produit $X = \Pi X_k$ d'espaces difféologiques peut être muni de la **difféologie produit**, la moins fine pour laquelle les surjections canoniques $X \to X_k$ soient différentiables; ce sont alors des subductions.

d)

Soient X et X' deux espaces difféologiques. L'ensemble $D(X, X')$ des applications différentiables F de X dans X' va devenir lui aussi difféologique: la **difféologie fonctionnelle**, c'est la moins fine qui rende différentiable l'application valuation:

$$(F, x) \longmapsto F(x);$$

une application P d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ dans $D(X, X')$ est une plaque ssi :

$$[(u, x) \longmapsto P(u)(x)] \in D(U \times X, X'),$$

$U \times X$ étant difféologique grâce à c*).

(2,3) Homotopie des espaces difféologiques

Soit X un espace difféologique.

a)

Parmi les partitions de X, il en existe une (dont les classes s'appelleront **composantes** de X) qui est caractérisée par chacune des deux propriétés suivantes:

* C'est la plus fine partition de X en somme de parties;

* c'est la plus fine partition de X qui rende le quotient discret (attention ! il s'agit de la discrétion difféologique (2,2,a)).

Deux points x_0, x_1 de X seront dits **homotopes** s'ils appartiennent à la même composante; il faut et il suffit pour cela qu'il existe un **arc** F (application différentiable de $\mathbb{R}$ dans X) tel que $F(0) = x_0$ et $F(1) = x_1$.

b)

Si A est différentiable $X \to X'$, l'image par A de chaque composante de X est contenue dans une composante de X'.

c)

X sera dit **connexe** s'il possède une seule composante; les composantes d'un espace X sont les parties connexes maximales de X.

d)

Soient X un espace difféologique connexe; x un point de X.
Appelons **lacets** de sommet x les arcs Λ tels que $\Lambda(0)=\Lambda(1)=x$; l'ensemble L de ces lacets sera muni de la difféologie induite de la difféologie fonctionnelle.

Alors le **groupe d'homotopie** $\pi_1(X)$ se définit comme l'ensemble des composantes de L (c'est donc un quotient discret de L); sa loi de groupe est l'image dans le quotient de la loi partielle de L dite "juxtaposition" des lacets. Changer le sommet x remplace le groupe par un groupe isomorphe.

X sera dit **simplement connexe** si l'espace L des lacets est connexe, c'est-à-dire si $\pi_1(X) = 0$.

e)

Par récurrence, on définit le **n-ième groupe d'homotopie** de X, $\pi_n(X)$, comme le π_{n-1} d'une composante (arbitraire) de l'espace L des lacets; $\pi_n(X)$ est commutatif pour $n \geq 2$.

(2,4) Groupes difféologiques

a)

Soit G un groupe; une difféologie sur G sera dite **difféologie de groupe** si l'application:

$$(g, g') \longmapsto g^{-1} g'$$

est différentiable (du produit cartésien $G \times G$ dans G).

b)

Un groupe G muni d'une telle difféologie s'appellera **groupe difféologique**. Les groupes difféologiques constituent une **catégorie**, dont les flèches (**D-morphismes**) sont les morphismes de groupe qui sont différentiables.

c)

Tout **sous-groupe** H d'un groupe difféologique G (muni de sa difféologie de partie) est un groupe difféologique; si H est distingué, le **quotient** G/H, à la fois groupe et espace difféologique, est encore un groupe difféologique.

Pour tout sous-groupe H, l'espace difféologique G/H s'appellera **espace homogène de** G; plus généralement, un espace difféologique sera dit **homogène** s'il est difféomorphe à un tel quotient.

En particulier, la **composante** G° de l'élément neutre d'un groupe difféologique G est un sous-groupe connexe et distingué (et même invariant par tout D-automorphisme); le **groupe des composantes** G/G° est discret.

(2,5) Exemples de groupes difféologiques

a)

Un groupe de Lie G muni de sa difféologie de variété est une groupe difféologique; et aussi tout sous-groupe de G, tout groupe quotient de G.

♫ Ainsi le **tore de Denjoy-Poincaré** $\mathbb{T}_\alpha$, quotient du tore usuel $\mathbb{T}^2$ par un enroulement de pente irrationnelle α est un groupe difféologique (Cf. (2,7,d)); $\mathbb{T}_\alpha$ et $\mathbb{T}_\beta$ sont isomorphes ssi α et β sont unimodulairement équivalents; le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{T}_\alpha$ se réduit aux translations - sauf dans le cas où α est irrationnel quadratique (ceci grâce au théorème de Galois sur la périodicité du développement en fraction continue).

b) groupes de difféomorphismes

Si X est un espace difféologique quelconque, le groupe Diff(X) des **difféomorphismes** de X sera muni de la moins fine difféologie de groupe qui rende différentiable la valuation (Cf.(2,2,d)); une application P d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans Diff(X) sera une p-plaque ssi les applications

$$(u, x) \longmapsto P(u)(x)$$

et

$$(u, x) \longmapsto P(u)^{-1}(x)$$

sont différentiables (de def(P) $\times$ X à X).

c)

Si G est un groupe difféologique, le groupe Aut(G) de ses **D-automorphismes** est un groupe difféologique - comme sous-groupe de Diff(G). Les automorphismes intérieurs de G sont des D-automorphismes; plus précisément, l'application Ad:

$$Ad(g)(g') = g g' g^{-1}$$

est un D-morphisme $G \to Aut(G)$;.

(2,6) Actions

Soit X un ensemble, G un groupe difféologique, A une action de G sur X, c'est-à-dire un morphisme de groupe $G \to X!$ (X! : groupe des permutations de X).

a)

Nous dirons que A est une **action différentiable** (**D-action**) si X est difféologique et si A est un D-morphisme: $G \to$ Diff(X) .

Exemple:

les actions différentiables usuelles d'un groupe de Lie sur une variété séparée.

b)

La plus fine difféologie de l'ensemble X qui fasse de A une D-action s'appellera **difféologie de Klein**; G sera dit **groupe générateur** de cette difféologie.

Les plaques de X sont les applications "relevables":

$$u \longmapsto A(P(u))(x) \qquad P: \text{plaque de } G,\ x \in X$$

et leurs bornes supérieures. X est la somme des orbites de G, chacune difféomorphe à un espace homogène: le quotient de G par le stabilisateur d'un point arbitraire.

c)

Un espace difféologique X sera dit **espace de Klein** si sa difféologie possède un groupe générateur; alors Diff(X) est aussi un groupe générateur.

exemple: les variétés séparées sont des espaces de Klein.

Toute somme, tout produit fini d'espaces de Klein est un espace de Klein.

(2,7) Fibrés principaux

Soit X et G un espace et un groupe difféologiques.

a)

♫ Nous appellerons **fibration principale** de X toute action A de G sur X telle que l'application:

$$(g, x) \longmapsto (A(g)(x), x)$$

soit une **induction** de G×X dans X×X (Cf. (2,2,b")).

Alors X s'appellera **fibré principal**, G **groupe structural**; les orbites de G s'appelleront **fibres**; l'espace quotient de X par la partition en fibres sera la **base**.

b)

Dans ces conditions A est une D-action libre; pour chaque x, $g \longmapsto A(g)(x)$ est un difféomorphisme de G avec la fibre de x (munie de sa difféologie de partie).

Exemples(c),(d),(e) :

c)

Dans le cas où G est un groupe de Lie, et où X et sa base X / G sont des variétés séparées, cette définition coïncide avec la définition usuelle de fibré principal localement trivial.

d)

On définit une fibration principale A de $\mathbb{T}^2$ par $\mathbb{R}$ en posant:

$$A(t)(z, z') = (e^{it} z, e^{i\alpha t} z')$$

pourvu que α soit irrationnel. La base est le tore de Denjoy-Poincaré $\mathbb{T}_\alpha$ (voir (2,5,e)).

♫La classification des $\mathbb{R}$-fibrés principaux de base $\mathbb{T}_\alpha$ dépend des propriétés arithmétiques de α, diophantien ou non [Iglesias; le problème se ramène à l'équation d'Arnold].

e)

Soit G un groupe difféologique; T et S deux sous-groupes emboîtés:

$$T \subset S \subset G$$

tels que T soit distingué dans S.

Alors on obtient une fibration principale de l'espace homogène G/T par le groupe S/T en posant:

$$A(sT)(gT) = gs^{-1}T;$$

la base s'identifie à G/S grâce à la subduction $P : gT \longmapsto gS$.

La D-action canonique ρ de G sur le fibré:

$$\rho(g)(g'T) = gg'T$$

commute avec l'action A du groupe structural :

$$\rho(g) \cdot A(sT) = A(sT) \cdot \rho(g);$$

l'action r de G sur la base:

$$r(g)(g'S) = gg'S$$

est équivariante par P avec l'action ρ sur le fibré:

$$P \cdot \rho(g) = r(g) \cdot P$$

(2,8) Revêtements

Soit X un espace difféologique.

Nous appellerons **revêtement** de X tout fibré principal X', de groupe structural discret, tel que X soit difféomorphe à la base de X.

a)

Si X est connexe, il existe un revêtement simplement connexe (dit **revêtement universel**), essentiellement unique; le groupe structural d'un revêtement universel est isomorphe au groupe d'homotopie $\pi_1(X)$ [Donato-Iglesias].

b)

Tout espace homogène connexe X est difféomorphe au quotient d'un groupe simplement connexe G par un sous-groupe H.

Désignons alors par $H°$ la composante neutre de H:

$$H° \subset H \subset G;$$

la fibration de $G/H°$ par $H/H°$ (voir (2,7,e)) fait de $G/H°$ un revêtement universel de X. $\pi_1(X)$ est donc isomorphe à $H/H°$.

c)

En particulier, si X est un groupe difféologique connexe, X est D-isomorphe au quotient G/H d'un groupe simplement connexe G par un sous-groupe distingué H.

Alors $H°$ est distingué dans G, ce qui fait du revêtement universel $G/H°$ un groupe difféologique; le sous-groupe discret $H/H°$ est une réalisation de $\pi_1(X)$; $H/H°$ est invariant et central dans le revêtement; $\pi_1(X)$ est donc commutatif.

(2,9) Difféologie forte

a)

Nous appellerons **rayon** d'un groupe difféologique G tout D-morphisme F: $\mathbb{R} \to G$. Un rayon F, c'est donc un arc de G vérifiant:

$$F(t+u) = F(t)\,F(u) \qquad \forall t, u \in \mathbb{R};$$

l'ensemble des rayons s'appellera **étoile** du groupe.

Pour tout rayon F et tout $g \in G$, $Ad(g) \cdot F$ est encore un rayon; ce qui définit l'**action adjointe** de G sur son étoile.

Exemples (b),(c):

b)

Si G est un groupe de Lie, ses rayons F sont en bijection avec les éléments $\mathfrak{F}$ de l'algèbre de Lie de G par la formule:

$$F(t) = \exp(t\,\mathfrak{F})$$

c)

Nous appellerons **vecteurs** d'un espace difféologique X les rayons de Diff(X).

Dans le cas où X est une variété séparée, les rayons F de Diff(X) sont effectivement en bijection avec les champs de vecteurs $\mathfrak{F}$ complets sur X, par intégration de l'équation différentielle associée; ce qui s'écrit :

$$F(t) = \exp(t\,\mathfrak{F}) .$$

Ces deux exemplent suggèrent de définir l'**exponentielle** comme l'application

$$\exp:\ F \longmapsto F(1)$$

de l'étoile dans le groupe.

d) Définition:

Si G est un groupe difféologique, la **difféologie forte** de G sera la plus fine difféologie de groupe pour laquelle les rayons soient différentiables.

Une application P d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans G qui se met sous la forme:

$$P(r) = F_1(u_1(r))\ldots F_k(u_k(r))\,g_0$$

[$F_1,..F_k$: rayons de G; $u_1\ldots u_k \in D(\mathrm{def}(P),\mathbb{R})$; $g_0 \in G$] est une plaque forte; toute plaque forte est borne supérieure (pour le prolongement) de plaques de ce type.

e)

Les rayons de la difféologie forte sont les mêmes que les rayons initiaux, si bien que le passage à la difféologie forte est une opération idempotente. G sera évidemment dit **fort** si la difféologie initiale coïncide avec la difféologie forte associée.

Exemples:

* Les groupes de Lie sont forts.

* Une **difféologie d'espace vectoriel**, c'est une difféologie sur un espace vectoriel réel X telle que les deux applications:

$$(x,x') \longmapsto x + x', \qquad (x,s) \longmapsto xs$$

$(x, x' \in X, s \in \mathbb{R})$ soient différentiables.

La plus fine difféologie d'espace vectoriel sur X existe: c'est celle dont les plaques P sont localement une somme finie:

$$P(u) = \sum_k x_k\, s_k(u)$$

$x_k \in X$, $s_k(u) \in \mathbb{R}$, s_k différentiables.

Alors les formes linéaires et multilinéaires sur X, à valeurs dans un espace vectoriel difféologique, sont toutes différentiables; les rayons du groupe additif X sont les applications linéaires $s \longmapsto xs$; la difféologie est forte.

f)

Un groupe difféologique G sera dit **fortement connexe** s'il est connexe pour sa difféologie forte; ce qui équivaut au fait que les éléments de G soient des produits finis d'exponentielles de rayons ((2,9,c)).

g)

Nous dirons que deux rayons F_1 et F_2 **commutent** si:

$$F_1(t)\,F_2(u) = F_2(u)\,F_1(t) \qquad \forall t, u \in \mathbb{R};$$

ce qui équivaut au fait que l'arc produit F:

$$F(t) = F_1(t)\,F_2(t)$$

soit un rayon.

3) p-formes difféologiques

(3,1) p-formes

a) p-formes classiques

Soient p et n deux entiers, X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par définition, une **p-forme** ω de X, c'est un champ de tenseurs antisymétriques de degré p, défini sur X, dont les composantes

$$\omega(x)_{i..l}$$

sont des fonctions C^∞ de $x \in X$.

L'image réciproque de ω par une application différentiable $A : X' \to X$ (X': ouvert de $\mathbb{R}^{n'}$), c'est la p-forme de X', notée $A^*\omega$, définie par la formule:

$$A^*\omega\ (x')_{i'\ldots l'} = \omega(A(x'))_{i\ldots l}\, D^i_{i'} \ldots D^l_{l'}$$

où D désigne la matrice jacobienne de l'application A au point x', et où on applique la convention d'Einstein.

b) p-formes difféologiques

Une **p-forme d'un espace difféologique** X, ce sera par définition une fonctionnelle ω, associant à toute plaque P de X une p-forme (classique!) de l'ouvert def(P), notée

$$P^*\omega$$

de sorte que soit vérifiée quels que soient P et A la condition de compatibilité:

$$[P \circ A]^*\omega = A^*[P^*\omega]$$

(A^* est défini comme ci-dessus, a)).

c)

Si X est un espace difféologique, si B est une application différentiable de X dans X', et si ω est une p-forme de X', il existe une p-forme de X, l'**image réciproque** de ω par B, notée:

$$B^*\omega$$

définie par:

$$P^*[B^*\omega] = [B \circ P]^*\omega \quad \text{pour toute plaque } P \text{ de } X;$$

avec cette convention (qui inclut tous les usages précédents du signe *), les p-formes deviennent des objets "covariants" de la catégorie des espaces difféologiques:

$$[B \circ C]^*\omega = C^*[B^*\omega] \quad \text{si } B \text{ et } C \text{ sont différentiables.}$$

d)

En particulier, si X est une partie quelconque de X', et si ω est une p-forme de X', nous appellerons **forme induite** par ω sur X l'image réciproque

$$I^*\omega,$$

I désignant l'induction canonique de X dans X' (Cf. (2,2,b")).

e)

Si A est une subduction de X sur X', l'image réciproque par A est une application injective:

$$A^*\omega_1 = A^*\omega_2 \implies \omega_1 = \omega_2$$

f)

Les p-formes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ forment évidemment un espace vectoriel; de même pour les p-formes des espaces difféologiques - la structure vectorielle étant caractérisée par le fait que l'opération image réciproque est linéaire.

(3,2) Valeurs d'une forme

a)

Soient ω_1 et ω_2 deux p-formes d'un même espace difféologique X; x un point de X.

Dans le cas des formes classiques (X est alors un ouvert d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$), il résulte de (3,1,a) que:

$$\big[\omega_1(x) = \omega_2(x)\big] \iff \big[P^*\omega_1(0) = P^*\omega_2(0) \text{ pour toute plaque } P \text{ de } X \text{ telle que } P(0) = x\big]$$

Dans le cas général, le second membre de cette formule est une relation d'équivalence entre ω_1 et ω_2, relation qui ne dépend que du point $x \in X$; la classe d'une forme ω selon cette relation pourra donc se noter $\omega(x)$, de sorte que l'équivalence ci-dessus reste vraie dans le cas général; l'objet $\omega(x)$ s'appellera **valeur de ω en** x.

b)

La valeur de $A^*\omega$ en x ne dépend de ω que par sa valeur en A(x):

$$\omega_1(A(x)) = \omega_2(A(x)) \implies A^*\omega_1(x) = A^*\omega_2(x)$$

c)

Deux p-formes ayant même valeur en tout point sont égales

d)

On donne une structure vectorielle à l'espace des valeurs en x des p-formes en postulant la linéarité de l'application "valeur" : $\omega \longmapsto \omega(x)$.

e)

En particulier, la valeur d'une **0-forme** α de X en un point peut s'identifier à un nombre, ce qui permet d'identifier les 0-formes avec les **fonctions différentiables**, selon la règle:

$$\alpha(P(u)) = P^*\alpha(u) \quad \text{pour toute plaque } P \text{ et tout } u \in \mathrm{def}(P);$$

avec cette identification, l'image réciproque s'exprime par:

$$A^*\alpha = \alpha \circ A$$

f)

Sur une variété X, la valeur d'une p-forme en x peut s'identifier à un tenseur de l'espace tangent à X en x.

(3,3) <u>**Calcul de Cartan difféologique**</u>

a)

La <u>dérivée extérieure</u>

$$d\omega$$

d'une p–forme classique ω est la [p+1]-forme dont les composantes sont données par:

$$d\omega(x)_{jk\ldots m} = \partial_j\, \omega(x)_{k\ldots m} - \partial_k\, \omega(x)_{j\ldots m} - \cdots - \partial_m\, \omega(x)_{k\ldots j}$$

b) <u>dérivation difféologique</u>

La **dérivée extérieure**

$$d\omega$$

d'une p–forme ω d'un <u>espace difféologique</u> X s'en déduit en posant:

$$P^*[d\omega] = d[P^*(\omega)] \quad \text{pour toute plaque } P;$$

c'est une [p+1]-forme de X;

c)

la dérivation extérieure d est une opération <u>linéaire</u>, qui <u>commute</u> avec l'image réciproque:

$$A^* d\omega = d\, A^*\omega$$

et qui est bien entendu <u>nilpotente</u>:

$$d\, d\, \omega = 0$$

d)

Sur un espace difféologique <u>simplement connexe</u>, les 1-formes ω qui sont **fermées** ($d\omega = 0$) sont **exactes**: il existe une 0-forme α telle que $\omega = d\alpha$; α est définie à une constante additive près par cette relation.

Soient:

X un <u>espace difféologique</u>,

F un <u>arc</u> de D(X,X), tel que $F(0) = 1_X$,

ω une <u>p–forme</u> de X

(D(X,X) est muni de sa difféologie fonctionnelle); alors (e),(f),(g),(h),(i),(j):

e) <u>produit intérieur</u>

Il existe une [p -1] -forme de X, appelée **produit intérieur** de ω par F, notée:

$$i(F)\omega$$

qui est définie par ses composantes dans toute plaque P , en tout point u de def(P):

$$P^* i(F)\omega\,(u)_{j\ldots l} = [(t,v) \longmapsto F(t)(P(v))]^*\omega\,(0,u)_{0j\ldots l}$$

l'indice 0 se réfère à la variable t; les indices j,... l varient de 1 à la dimension de def(P).

La valeur $i(F)\omega\,(x)$ ne dépend de ω que par $\omega(x)$;

i(F) est <u>linéaire</u>;

Dans le cas p=1, l'identification d'une 0-forme et d'une fonction (3,2,e) conduit à la formule:

$$i(F)\omega\,(x) = [t \longmapsto F(t)(x)]^*\omega\,(0)$$

On pourra compléter la définition du produit intérieur en posant $i(F)(\omega) = 0$ dans le cas p=0 .

f) <u>Dérivée de Lie</u>

Il existe une p–forme de X, appelée **dérivée de Lie** de ω (pour l'arc F), notée:

$$\mathcal{L}_F\, \omega \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}(F)\, \omega$$

définie par ses composantes dans toute plaque P en tout point u:

$$P^* \mathcal{L}(F)\omega\,(u)_{j\ldots l} = d/dt \left\{ [F(t) \circ P]^*\omega\,(u)_{j\ldots l} \right\}_{t=0};$$

$\mathcal{L}_F$ est <u>linéaire</u>;

On a identiquement:

♫ $$\mathcal{L}_F\, \omega = i(F)\, d\, \omega + d\, i(F)\, \omega$$

(formule qui se réduit dans le cas p=0 à $\mathcal{L}_F\, \omega = i(F)\, d\, \omega$), et:

$$\mathcal{L}_F\, d\omega = d\, \mathcal{L}_F\, \omega$$

g)

Si g est un difféomorphisme de X, on a:

$$i(F)\, g^*\omega = g^*\, i(\mathrm{Ad}(g)\circ F)\,\omega$$

$$\mathcal{L}(F)\, g^*\omega = g^*\mathcal{L}(\mathrm{Ad}(g)\circ F)\,\omega$$

Notation: $[\mathrm{Ad}(g)\circ F](t) = g\circ F(t)\circ g^{-1}$.

h)

Si u est une fonction réelle différentiable telle que $u(0) = 0$, on a:

$$i(F\circ u)\,\omega = u'(0)\; i(F)\,\omega$$

$$\mathcal{L}(F\circ u)\,\omega = u'(0)\;\mathcal{L}(F)\,\omega$$

Si F_1 et F_2 sont des arcs dont on définit le produit $F_1 F_2$ par:

$$[F_1 F_2](t) = F_1(t)\circ F_2(t)$$

on a:

$$i(F_1 F_2)\,\omega = i(F_1)\,\omega + i(F_2)\,\omega$$

$$\mathcal{L}(F_1 F_2)\,\omega = \mathcal{L}(F_1)\,\omega + \mathcal{L}(F_2)\,\omega$$

i)

On suppose que F prend ses valeurs dans $\mathrm{Diff}(X)$ et on pose $F_a(t) = F(t+a)\circ F(a)^{-1}$; alors:

$$\left[\mathcal{L}(F_a)\,\omega = 0 \quad \text{pour tout } a\right] \iff \left[F(t)^*\omega = \omega \quad \text{pour tout } t\right]$$

♫ en particulier, si F est un **vecteur,** on a:

$$\left[\mathcal{L}_F\,\omega = 0\right] \iff \left[F(t)^*\omega = \omega \quad \text{pour tout } t\right]$$

j)

Nous dirons que deux <u>arcs</u> F_1 et F_2 **commutent** si:

$$F_1(t)\circ F_2(u) = F_2(u)\circ F_1(t) \qquad \forall t, u$$

(Exemple: tout vecteur commute avec lui-même); alors:

$$i(F_1)\; i(F_2)\;\omega = -\, i(F_2)\; i(F_1)\;\omega$$

$$\mathcal{L}(F_1)\,\mathcal{L}(F_2)\;\omega = \mathcal{L}(F_2)\;\mathcal{L}(F_1)\;\omega$$

4) Préquantification

(4,1) <u>**Formes invariantes**</u>

Soit G un groupe difféologique.

Désignons par L_g et R_g les translations associées à un élément g: $L_g(g') = gg'$, $R_g(g') = g'g^{-1}$, de façon que $g \longmapsto L_g$ et $g \longmapsto R_g$ soient de <u>D-actions</u> de G sur G. On a évidemment: $L_g\circ R_g = R_g\circ L_g = \mathrm{Ad}(g)$.

Une p-forme ω de G sera dite **invariante à gauche**, ou simplement **invariante**, si:

$$L_g^*\omega = \omega \qquad \forall g \in G;$$

alors:

a)

♫ <u>Pour toute p-forme</u> ω de G, il existe <u>une seule</u> p-forme <u>invariante</u> qui a <u>même valeur que</u> ω en l'élément neutre e de G; cette p-forme, soit Ω, est donnée par la formule:

$$P^*\Omega\,(u) = [v \longmapsto P(u)^{-1}\, P(u+v)]^*\,\omega\ (0)$$

valable pour toute plaque P de G, tout $u \in \mathrm{def}(P)$. Dans cette formule, il peut être commode de désigner la variable muette v par la notation δu.

b)

Les p-formes invariantes constituent un <u>espace vectoriel</u>;

c)

pour toute p-forme invariante (à gauche) ω et tout $g \in G$, $R_g^*(\omega)$ est encore invariante (à gauche); la formule:

$$r(g)(\omega) = R_{g^{-1}}^*\,\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})^*\,\omega$$

définit une <u>représentation linéaire</u> r de G sur l'espace des p-formes invariantes; dans le cas $p=1$, cette représentation sera dite **coadjointe** (pour un groupe de Lie, c'est effectivement la représentation duale de la représentation adjointe).

d)

La <u>dérivée</u> $d\omega$ d'une p-forme invariante ω est une $[p+1]$-forme <u>invariante</u>.

Ceci donne évidemment naissance à une cohomologie qui, dans le cas particulier d'un groupe de Lie, s'appelle "cohomologie de l'algèbre de Lie".

e)

Soit ω une p–forme invariante sur G, F un arc de G ($F(0)=e$); alors la dérivée de Lie:

$$\mathcal{L}(\mathrm{Ad}\circ F)\,\omega$$

est encore invariante.

(4,2) <u>Espaces quantiques</u>

a) <u>Définition</u>

Nous appellerons **espace quantique** tout espace difféologique Ξ qui vérifie les axiomes i, ii, iii, iv suivants:

i)

Ξ est **fibré en cercles**: il existe une <u>fibration principale</u> A de Ξ par le tore $\mathbb{T}$.

Nous noterons :

* α le <u>vecteur</u> de Ξ: $\alpha(t) = A(e^{it})$ $\forall t \in \mathbb{R}$;
* cercle(ξ) la fibre d'un point ξ.

ii)

Ξ est muni d'une <u>1-forme</u> ω (**forme quantique**), reliée à α par:

$$\mathcal{L}(\alpha)\,\omega = 0$$
$$i(\alpha)\,\omega = \mathbb{1}$$

($\mathbb{1}$: fonction constante prenant la valeur 1).

iii)

Ξ est <u>engendré par ses automorphismes</u>, dans le sens suivant: Les difféomorphismes q de Ξ qui vérifient les conditions:

$$q^*\omega = \omega$$
$$q\circ A(z) = A(z)\circ q \qquad \forall z \in \mathbb{T}$$

s'appelleront **quantomorphismes**, et constituent un groupe noté Quant(Ξ); l'axiome demande que Quant(Ξ) agisse <u>transitivement</u> sur Ξ et soit <u>générateur</u> de la difféologie (2,6,b).

iv)

♫ **L'application moment** Ψ, définie par:

$$\underline{\xi}(q) = q(\xi) \qquad \forall \xi \in \Xi,\ \forall q \in \mathrm{Quant}(\Xi)$$
$$\Psi(\xi) = \underline{\xi}^*\omega \qquad \forall \xi \in \Xi$$

vérifie:

$$\Psi(\xi) = \Psi(\xi') \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{cercle}(\xi) = \mathrm{cercle}(\xi')$$

(L'implication réciproque résulte des axiomes précédents).

b)

Si Ξ est un espace quantique:

* l'image de A (ou de α) est égale au <u>centre</u> de Quant(Ξ);

* $\forall \xi \in \Xi$, on a :

$$A^*[\Psi(\xi)] = \omega_{\mathbb{T}}$$

$\omega_{\mathbb{T}}$ désignant la 1–forme invariante standard du tore:

$$\omega_{\mathbb{T}}(z)(\delta z) = \delta z / iz$$

(abus de notation sans ambiguité); on peut aussi définir $\omega_{\mathbb{T}}$ comme la forme invariante sur $\mathbb{T}$ qui coïncide en 1 avec $d\,[\,z \longmapsto \mathrm{Re}(z/i)]$

c) <u>Exemple d'espace quantique</u>:

Soit Ξ une variété séparée connexe de dimension impaire, munie d'une <u>forme de contact</u> ω : 1-forme telle qu'en tout point ξ les valeurs $\omega(\xi)$, $d\omega(\xi)$ (qui sont des tenseurs de l'espace vectoriel tangent) vérifient la condition:

$$\ker(\omega(\xi)) \cap \ker(d\omega(\xi)) = 0$$

Supposons aussi qu'il existe un vecteur α qui vérifie les conditions ii) ci-dessus (alors α est déterminé par ω, c'est le <u>vecteur de Reeb</u>). Supposons enfin que, pour tout $\xi \in \Xi$,

$$[\,\alpha(t)(\xi) = \xi\,] \iff [\,t \in 2\pi\mathbb{Z}\,]\ ;$$

alors il existe une fibration en cercles A de Ξ définie par:

$$A(e^{it}) = \alpha(t);$$

Ξ est un <u>espace quantique</u> (les axiomes iii, iv deviennent des théorèmes); nous dirons que Ξ est une **variété quantique**.

(4,3) Groupes dynamiques

Soit Ξ un espace difféologique, fibré en cercles et muni d'une 1-forme ω, de sorte que soient vérifiés les axiomes i) et ii) des espaces quantiques (4,2,a); supposons qu'il existe un groupe G, muni d'une D-action ρ sur Ξ, de sorte que:

iii bis)

G agit transitivement sur Ξ et est générateur de la difféologie;

Pour tout $g \in G$

$$\rho(g)^* \omega = \omega;$$
$$\rho(g) \circ A(z) = A(z) \circ \rho(g) \qquad \forall z \in \mathbb{T}$$

iv bis)

L'application **moment réduit** Ψ_ρ, définie par:

$$\Psi_\rho(\xi) = [g \longmapsto \rho(g)(\xi)]^* \omega$$

vérifie:

$$\Psi_\rho(\xi) = \Psi_\rho(\xi') \implies \text{cercle}(\xi) = \text{cercle}(\xi')$$

Alors Ξ est un <u>espace quantique</u>. La vérification des axiomes (4,2, iii et iv) est immédiate, compte tenu du fait que

$$\Psi_\rho(\xi) = \rho^*[\Psi(\xi)] \qquad \forall \xi \in \Xi$$

(Ψ : moment défini en (4,2,a)).

Nous dirons dans ce cas que G est un **groupe dynamique** de Ξ. Tout espace quantique Ξ possède au moins un groupe dynamique, à savoir Quant(Ξ).

Soit donc G un groupe dynamique d'un espace quantique Ξ. On a alors (a), (b), (c), (d), (e) :

a)

$\forall \xi \in \Xi$, $\Psi_\rho(\xi)$ est une 1-forme invariante de G;

b)

Ψ_ρ vérifie la relation d'équivariance:

$$\Psi_\rho \circ \rho(g) = r(g) \circ \Psi_\rho,$$

r désignant la représentation coadjointe de G (4,1,c); l'image $\Psi_\rho(\Xi)$ est donc une <u>orbite coadjointe</u> X de G.

c)

Munissons l'orbite X de la <u>difféologie de Klein</u> attachée à l'action de G; alors Ψ_ρ est une subduction de Ξ sur X, et fait de X la <u>base</u> du fibré Ξ.

d)

Soit S le stabilisateur d'un point x de X:

$$S = \{ s \in G \ / \ r(s)(x) = x \};$$

il existe un <u>caractère</u> χ de S, défini par:

$$A(\chi(s))(\xi) = \rho(s)(\xi) \quad \text{si } \Psi_\rho(\xi) = x;$$

χ est une <u>subduction</u> de S sur le tore $\mathbb{T}$; on a:

$$\chi^* \omega_{\mathbb{T}} = x_S$$

x_S désignant la forme induite par x sur S.

e)

Il existe une 2-forme fermée de X, σ, définie par:

$$\Psi_\rho^* \sigma = d\omega;$$

$\forall x \in X$, σ vérifie:

$$[g \longmapsto r(g)(x)]^* \sigma = dx$$

relation qui caractérise σ indépendament de l'existence de Ξ;

σ est invariante par l'action coadjointe:

$$r(g)^* \sigma = \sigma \qquad \text{pour tout } g \in G$$

<u>Exemple</u>:

Prenons le cas d'une variété quantique Ξ, avec G = Quant(Ξ); alors (X,σ) est une **variété symplectique**.

(4,4) Quantification des orbites

♫

Réciproquement, tout espace quantique peut être <u>reconstitué à partir de l'orbite coadjointe</u> associée d'un groupe dynamique. Plus généralement:

Soient G un groupe difféologique, x_0 une 1-forme invariante de G, X l'orbite de x_0 dans la représentation r (4,1), S le stabilisateur de x_0, x_S la forme induite par x sur S. Munissons X de la difféologie de Klein. On a dans ces conditions (a),(b),(c):

a)

S'il existe un caractère χ de S tel que:

χ est une subduction de S sur $\mathbb{T}$;

$x_S = \chi^* \omega_{\mathbb{T}}$

nous dirons que l'orbite X est **quantifiable**.

Alors les autres caractères χ' vérifiant ces conditions sont tous donnés par la formule:

$$\chi'(s) = \chi(s)\ \kappa(sS°)$$

κ étant un caractère quelconque du groupe discret $S/S°$ ($S°$ = composante neutre de S).

b)

χ étant ainsi choisi, il existe un <u>espace quantique</u> Ξ, une action ρ qui fait de G un <u>groupe dynamique</u> de Ξ, de sorte que X soit l'image de Ξ par l'application "moment réduit" Ψ_ρ, et que soient vérifiées les relations (4,3,d e) ci–dessus.

On construit cet espace quantique par les formules explicites suivantes (Cf. (2,7,e)):

Posons $\Sigma = \ker(\chi)$, $\Xi = G/\Sigma$; il existe une <u>fibration principale</u> A de Ξ caractérisée par:

$$A(\chi(s))(g\Sigma) = gs\Sigma \quad \forall g \in G, \forall s \in S;$$

une 1-forme ω caractérisée par :

$$[g \longmapsto g\Sigma]^* \omega = x_0$$

A et ω font de Ξ un espace quantique;

l'action ρ de G sur Ξ :

$$\rho(g)(g'\Sigma) = gg'\Sigma \qquad \forall g, g' \in G$$

en fait un groupe dynamique;

la projection Ψ_ρ de Ξ sur sa base X est donnée par:

$$\Psi_\rho(g\Sigma) = r(g)(x_0) \qquad \forall g \in G$$

c)

Cette construction est essentiellement unique, dans le sens suivant.

Soit (Ξ', ω', α') un autre espace quantique de base S, admettant G comme groupe dynamique. Alors les conditions i) et ii) sont équivalentes:

i) Il existe un difféomorphisme $F : \Xi \to \Xi'$ tel que:

* $\omega = F^* \omega'$
* $Ad(F) \cdot \alpha = \alpha'$
* $Ad(F) \cdot \rho = \rho'$

ii)

* les orbites $\Psi_\rho(\Xi)$ et $\Psi_\rho(\Xi')$ sont égales;
* en un point x de cette orbite, les caractères χ et χ' sont égaux.

d) <u>Exemple de quantification</u>:

Soit X un espace de Hilbert (ou préhilbertien) complexe; munissons-le de sa plus fine difféologie d'espace vectoriel réel (2,9,e) ; nous appellerons **groupe de Heisenberg** l'espace difféologique produit $G = X \times \mathbb{R}$ muni de la loi de groupe (1,1,g) :

$$(x, s)(x', s') = (x+x', s+s'+\sigma(x,x'));$$

($\langle , \rangle = g + i\sigma$); G est un <u>groupe difféologique</u> (un groupe de Lie si $\dim(X) < \infty$); il est <u>fort</u> et <u>simplement connexe</u>.

Soit ϕ la fonction $(x,s) \longmapsto s$ et soit x_0 la 1-forme invariante qui coïncide avec $d\phi$ en (0,0).

Pour calculer x_0, il suffit de calculer la forme $I^* x_0$ induite sur un sous-espace vectoriel de dimension finie du produit cartésien G (parce que toutes les plaques de G prennent localement leurs valeurs dans un tel sous-espace). L'utilisation de la formule (4,1,a) donne:

$$I^* x_0\ (x,s)\ (\delta x, \delta s) = \delta s - \sigma(x, \delta x);$$

puisque le résultat ne dépend pas du choix de I, on pourra oublier d'écrire I^*.

Le stabilisateur S de x_0 dans la représentation coadjointe est $(0, \mathbb{R})$; le seul caractère χ quantifiant l'orbite de x_0 est:

$$\chi(0,s) = e^{is};$$

le noyau Σ est donc $(0, 2\pi\mathbb{Z})$; l'<u>espace quantique</u> Ξ s'identifie difféologiquement à $X \times \mathbb{T}$, fibré trivialement par:

$$A(z)(x', z') = (x', zz'),$$

l'action de G sur Ξ est donnée par:

$$\rho(x,s)(x', z') = (x+x', e^{i[s+\sigma(x,x')]} z');$$

l'<u>application moment réduit</u>, Ψ_ρ, est donnée par:

$$\Psi_\rho(x, z)(x', s')\ (\delta x', \delta s') = \delta s' - \sigma(x', \delta x') - 2\sigma(x, \delta x')$$

la <u>forme quantique</u> ω s'écrira avec un peu de laxisme:

$$\omega(x,z)(\delta x, \delta z) = \delta z / iz - \sigma(x, \delta x);$$

la 2-forme (4,3,e) (notée $\boldsymbol{\sigma}$) est définie sur la base (identifiée ici à X) par:

$$\boldsymbol{\sigma}(x)(\delta x)(\delta' x) = -2\,\sigma(\delta x, \delta' x)$$

(4,5) Cas des orbites simpliciales

Soit G un groupe difféologique, X une orbite coadjointe.

Nous dirons que X est **simpliciale** si, pour un point $x \in X$, il existe un fonction ϕ, différentiable sur G, telle que les formes x et $d\phi$ coïncident en e (cette propriété ne dépend pas du choix de x).

<u>Exemples</u>: le cas précédent (4,4,d); le cas où G est un groupe de Lie.

Dans ces conditions, on a les résultats (a), (b), (c), (d) suivants:

a)

La forme x_S induite par x sur le stabilisateur S de x est <u>fermée</u>; nous dirons que l'orbite est **nilpotente** si $x_S = 0$.

b)

Soient S° la composante neutre de S; $\mathbf{S}$ son revêtement universel; $\mathcal{P}$ la projection de $\mathbf{S}$ dans S; alors l'image réciproque de x_S par $\mathcal{P}$ est égale à

$$d\mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ étant un D-morphisme $\mathbf{S} \to \mathbb{R}$ qui est caractérisé par cette propriété;

c)

l'image par $\mathcal{A}$ du groupe d'homotopie $\pi_1(S°)$ (Cf. (2,8,c)) est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, qui ne dépend que de l'orbite.

L'orbite sera dite **entière** si $\mathcal{A}(\pi_1(S°)) \subset 2\pi\mathbb{Z}$; il existe alors un caractère χ_0 de S° défini par

$$\chi_0(s) = \exp(i\mathcal{A}(\mathcal{P}(s))) \qquad \forall s \in \mathbf{S};$$

d)

Pour que l'orbite soit quantifiable, il est nécessaire qu'elle soit <u>entière et non nilpotente</u>; alors un caractère χ de S <u>quantifie</u> X si et seulement si il <u>prolonge</u> χ_0. Bien entendu

l'existence d'un tel prolongement est soumise à la nullité d'une certaine obstruction cohomologique.

(4,6) Hamiltoniens

a)

Soit Ξ un espace quantique, G un groupe dynamique de Ξ (notations (4,3)), X la base de Ξ , orbite coadjointe de G.

Considérons un arc F de G, tel que $F(0) = e$; posons:

$$h = i(\rho \circ F)\,\omega$$

h est une fonction différentiable sur Ξ que nous appellerons **hamiltonien** (associé à F). Cette fonction vérifie les propositions (b) . . . (h) suivantes:

b)

Le hamiltonien s'obtient aussi par la formule directe :

$$h(\xi) = F^* \, \Psi_\rho(\xi)\,(0) \qquad \forall \xi \in \Xi$$

où on identifie canoniquement la valeur en 0 d'une 1-forme de $\mathbb{R}$ avec un réel; la fonction h vérifie:

$$h(\rho(g)(\xi)) - h(\xi) = i(Ad \circ F)\,\Psi_\rho(\xi)\,(g) \quad \forall g \in G,\ \xi \in \Xi$$

$$dh = -\,i(\rho \circ F)\,d\omega$$

c)

Il existe une fonction h', définie sur X par

$$h = h' \circ \Psi_\rho$$

ou:

$$h'(x) = F^* x\,(0) \qquad \forall x \in X$$

formule qui ne met en je que l'orbite coadjointe (et non l'espace quantique); h' est différentiable sur X et vérifie:

$$h'(r(g)(x)) - h'(x) = i(Ad \circ F)\,x\,(g) \quad \forall g \in G,\ x \in X$$

et

$$d\,h' = -\,i\,(r \circ F)\,\sigma$$

r désignant l'action coadjointe de G , σ la 2-forme "symplectique" définie en (4,3,d)

d)

Pour tout $g \in G$, le hamiltonien associé à $Ad(g) \circ F$ est égal à $h \circ \rho(g^{-1})$

e)

Le hamiltonien associé à F^{-1} ($F^{-1}(t) = F(t)^{-1}$) est égal à $-h$;

f)

Si h_1 et h_2 sont les hamiltoniens associés à F_1 et F_2, le hamiltonien associé au produit $F_1 F_2$ est égal à la somme $h_1 + h_2$;

g)

Nous dirons que deux rayons F_1 et F_2 de G sont **en involution** si $\rho \circ F_1$ et $\rho \circ F_2$ commutent, au sens (2,9,g) (il suffit évidemment que F_1 et F_2 commutent).

Soit h_2 le hamiltonien de F_2. La condition:

$$i(\rho \circ F_1)\, dh_2 = 0$$

est équivalente à la suivante:

h_2 est constante sur les orbites de l'action $\rho \circ F_1$ de $\mathbb{R}$ sur Ξ

et nécessaire pour que F_1 et F_2 soient en involution.

h)

Supposons l'orbite X simpliciale. Soient F_1 et F_2 deux rayons de G, h_1 et h_2 leurs hamiltoniens; alors:

$$[h_1 = h_2] \iff [\rho \circ F_1 = \rho \circ F_2]$$

$$[F_1 \text{ et } F_2 \text{ en involution}] \iff [\, i(\rho \circ F_1)\, dh_2 = 0\,] \iff [\, i(\rho \circ F_2)\, dh_1 = 0\,]$$

i) Exemple d'hamiltonien (en dimension pas nécessairement finie):

Tout rayon F du groupe de Heisenberg G (4,4,d) s'écrit:

$$F(t) = (xt, st)$$

(x,s) étant un point de G. Ceci montre que l'application "exponentielle": $F \longmapsto F(1)$ est une bijection de l'étoile de G avec G.

L'orbite étant simpliciale, l'application $F \longmapsto h$ est nécessairement injective; le calcul donne la valeur de la fonction hamiltonienne h associée à F:

$$h(x', z') = s + 2\,\sigma(x, x')$$

ce qui permet de contrôler l'injectivité; quant à la condition d'involution, on peut l'écrire:

$$\sigma(x_1, x_2) = 0$$

5) Quantification

(5,1) <u>Etats quantiques</u>

Soient Ξ un espace quantique, G un groupe dynamique de Ξ (définitions et notations (4,2),(4,3));

Un état m de G (Cf.(1,2)), c'est par définition une fonction complexe sur G qui vérifie d'une part:

$$m(e) = 1$$

et d'autre part, pour toute famille finie $C_k \in \mathbb{C}$, $g_k \in G$:

$$0 \leq \sum_{j,k} \overline{C}_j C_k\, m(g_j^{-1} g_k)$$

a) Définition:

♫ Nous appellerons **état quantique** tout état m de G vérifiant aussi la condition suivante:

Chaque fois que F_k est une famille finie de rayons de G qui commutent deux à deux (2,9,g), on a $\forall\, C_k \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{j,k} \overline{C}_j C_k\, m(F_j(-1)\, F_k(1)) \leq \sup_{\xi \in \Xi} \Big| \sum_k C_k\, e^{i h_k(\xi)} \Big|^2$$

les h_k désignant les hamiltoniens des F_k;
le premier membre est évidemment réel positif du fait que m est un état.

b)

Si m est un état quantique, et si $g \in G$, la fonction

$$m \circ Ad(g^{-1})$$

est encore un état quantique (parce que le hamiltonien de $Ad(g^{-1}) \circ F_k$ est égal à $h_k \circ \rho(g)$ (4,6,d)). Plus précisément, G agit sur l'ensemble **Q** des états quantiques par:

$$g \longmapsto [m \longmapsto m \circ Ad(g^{-1})]$$

c) Théorème:

* Pour tout rayon F de G, et pour tout état quantique m de G, la fonction:

$$m \circ F$$

est un état statistique de la droite réelle (pour sa structure statistique (1,4,c)).

* Si $m \circ F$ est continue, $m \circ F$ est la transformée de Fourier d'une loi de probabilité μ de $\mathbb{R}$:

$$m(F(t)) = \int e^{i\omega t}\, d\mu(\omega)$$

* ♫ Si le hamiltonien h de F est borné:

$$|h(\zeta)| \leq B \qquad \forall \zeta \in \Xi$$

$m \circ F$ est continue et le support de μ est contenu dans la fermeture de $h(\Xi)$.

Remarques:

* Dans ce dernier cas, puisque le support de μ est compact, la fonction $m \circ F$ est analytique réelle (à valeurs complexes).

* On voit qu'un état F dont le hamiltonien prend une valeur constante a vérifie:

$$m(F(t)) = \exp(iat)$$

pour tout état quantique m . La première inégalité (1,2,a) montre alors que:

♫ $$m(F(t)\, g) = m(g\; F(t)) = \exp(iat)\, m(g)$$

$\forall m$ quantique, $\forall g \in G, \forall t \in \mathbb{R}$

d) Relations d'incertitude

Soit F un arc quelconque de G, m un état de G. Supposons que la fonction $m \circ F$ admette au point 0 un développement limité à l'ordre 2. En utilisant le seul fait que les valeurs de $m \circ F$ appartiennent au disque unité, on constate qu'il peut s'écrire sous la forme:

$$m \circ F(t) = 1 + i\boldsymbol{p}t - (\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2 + i\boldsymbol{\tau})\, t^2/2 + o(t^2)$$

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}$ étant trois réels ($\boldsymbol{\sigma} \geq 0$).

Dans le cas où F est un rayon de G, $m \circ F$ est de type positif sur $\mathbb{R}$; puisqu'elle est continue à l'origine, elle est continue partout (1,2,d), donc transformée de Fourier d'une loi de probabilité μ ; l'existence du développement assure l'existence des moments jusqu'au second ordre, et le calcul montre que:

$\boldsymbol{p}$ = valeur moyenne de μ

$\boldsymbol{\sigma}$ = écart-type (standard error) de μ

$\boldsymbol{\tau} = 0$

La deuxième inégalité (1,2,a) montre que $m \circ F$ vérifie une condition de Cauchy:

$$|m(F(t)) - m(F(t'))| \leq \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2}\; |t - t'|$$

Supposons maintenant que F soit le produit F_1F_2 de deux rayons F_1 et F_2, et que les trois fonctions $m \circ F$, $m \circ F_1$, $m \circ F_2$ admettent des développements; la première inégalité (1,2 a), appliquée à $g = F_1(t), g' = F_2(t)$, donne les relations:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$$

$$\boldsymbol{\tau}^2 \leq (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)(-\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)$$

d'où:

$$|\boldsymbol{\tau}| \leq 2\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas du groupe de Heisenberg (4,4,i) ; les rayons F_1 et F_2 s'écrivent:

$$F_1(t) = (x_1 t,\ s_1 t) \qquad F_2(t) = (x_2 t,\ s_2 t);$$

on remarque que les rayons F_3 et Φ:

$$F_3(t) = ((x_1 + x_2)t,\ (s_1 + s_2)t) \qquad \Phi(t) = (0, \sigma(x_1, x_2)\, t)$$

sont liés aux précédents par l'identité:

$$F_1(t)\, F_2(t) = F_3(t)\, \Phi(t^2).$$

Supposons que les trois fonctions $m \circ F_1, m \circ F_2, m \circ F_3$ admettent des développements à l'ordre 2 et que l'état m soit quantique.

Du fait que le hamiltonien de Φ prend la valeur constante $a = \sigma(x_1, x_2)$, il résulte que $m(\Phi(t)) = e^{iat}$; l'inégalité (1,2,a) montre que:

$$m(F_1(t)\, F_2(t)) = m(F_3(t))\, \exp(iat^2)$$

d'où le développement limité:

$$m(F_1(t)\, F_2(t)) = 1 + it\boldsymbol{p}_3 - (\boldsymbol{p}_3{}^2 + \boldsymbol{\sigma}_3{}^2 - 2ia)\, t^2/2 + o(t^2)$$

et l'inégalité ci-dessus $|\boldsymbol{\tau}| \leq 2\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$ s'écrit:

♫ $$\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \geq |\sigma(x_1, x_2)| ;$$

cette **relation d'incertitude** relie les écarts-types $\boldsymbol{\sigma}_1$ et $\boldsymbol{\sigma}_2$ dans le cas où F_1 et F_2 ne sont pas en involution ; elle ne dépend pas du choix de m parmi les états quantiques.

(5,2) Représentations quantiques

a) Théorème:

* Les états quantiques forment une face Q du convexe des états;
* cette face est fermée pour la convergence uniforme;
* ♫ tout état subordonné à un état quantique est quantique.

b) Corollaire:

Si u est la représentation unitaire de G associée à un état quantique m par la construction GNS (1,1,d):

$$m(g) = \langle \psi, u(g)\, \psi \rangle \quad \forall g \in G \; ; \; \psi \text{ cyclique}$$

tout vecteur unitaire ψ' ($\|\psi'\| = 1$) du même espace de Hilbert $\mathcal{H}$ fournit un état m' :

$$m'(g) = \langle \psi', u(g)\, \psi' \rangle \quad \forall g \in G$$

qui est lui aussi quantique (c'est une limite uniforme de subordonnés à m).

ψ' sera dit **vecteur d'état** de m'.

c)

On peut énoncer ce résultat en définissant la classe des **représentations quantiques** de G: ce sont les représentations unitaires cycliques telles que, pour tout ψ unitaire (resp. pour un ψ unitaire cyclique), l'état m

$$m(g) = \langle \psi, u(g)\, \psi \rangle \quad \forall g \in G$$

soit quantique.

Il est clair que les états $m \circ Ad(g^{-1})$ engendrent la même représentation quantique que m, à une équivalence unitaire près (Cf. (1,1,d)).

d)

Toute représentation quantique u fournit d'autres états quantiques, qui ne sont pas associé à un vecteur d'état, et qui seront dits "**mélangés**": ils sont donnés par la formule:

$$m(g) = \mathrm{Tr}(\, u(g)\, D\,)$$

D étant un opérateur à trace self-adjoint, positif, de trace 1 (**opérateur densité**): en effet la décomposition spectrale de D fait apparaître m comme limite uniforme de barycentres d'états quantiques.

e)

Soit H un opérateur self-adjoint. Pour tout réel β, l'opérateur

$$e^{-\beta H}$$

est self-adjoint positif; supposons que ce soit un opérateur à trace pour une certaine valeur β_0 de β (ceci exige que le spectre de H soit discret et borné inférieurement, que les dimensions des sous-espaces propres soient finies). Alors $e^{-\beta H}$ est encore un opérateur à trace pour tout $\beta > \beta_0$; on définira donc une famille d'états quantiques indexés par β en posant

$$m_\beta(g) = \frac{\mathrm{Tr}(\, u(g)\, e^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}(\, e^{-\beta H})}$$

(**états de Gibbs**); la limite (uniforme) m_∞ est encore un état mélangé; son opérateur densité vaut Π_0 / r ; Π_0 : projecteur spectral associé à la plus petite valeur propre de H, r : rang de Π_0.

f)

Soit m un état quantique, u la représentation quantique associée, $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert correspondant ; F un rayon de G.

Quel que soit g dans G, $Ad(g) \circ F$ est encore un rayon, $m \circ Ad(g)$ un état quantique. Supposons que la fonction de type positif sur $\mathbb{R}$:

$$m \circ Ad(g) \circ F$$

soit continue pour tout g.

Il est facile de montrer que cette proposition est équivalente à l'une des quatre suivantes:

* la continuité de $m' \circ F$ pour tout état m' subordonné à m;
* la continuité de la fonction $t \longmapsto \langle \psi, u(F(t))\, \psi \rangle$ quel que soit $\psi \in \mathcal{H}$;
* La continuité en norme de chaque application $\mathbb{R} \longmapsto \mathcal{H}$:
$$t \longmapsto u(F(t))\, \psi$$
* ♫ L'existence et l'unicité d'un **opérateur self-adjoint** H de $\mathcal{H}$ tel que:
$$u(F(t)) = e^{itH} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$
(théorème de Stone).

Notons alors Π la **mesure spectrale** de H (à valeurs dans les projecteurs de $\mathcal{H}$); pour tout vecteur unitaire ψ, l'état quantique associé m vérifie :

$$m(\,F(t)\,) = \int \exp(i\omega t)\; d \langle \psi, \Pi(\omega)\, \psi \rangle$$

ce qui exprime la loi de probabilité μ dont $m \circ F$ est transformée de Fourier, sous forme d'intégrale de Stieltjes, en fonction du vecteur d'état ψ.

De même pour l'état mélangé associé à un opérateur densité D:

$$m(F(t)) = \int \exp(i\omega t)\, d\, \mathrm{Tr}(\Pi(\omega)\, D)$$

Cette propriété est vraie en particulier, quel que soit m, si la fonction hamiltonienne h est bornée; le théorème (5,1,b) relatif au support montre que dans ce cas le **spectre** de H est contenu dans la fermeture de l'image de h ; et en particulier que H est borné.

g) On constate facilement que, dans le convexe $\mathcal{K}$ des états, le convexe $\mathbf{Q}$ des états quantiques est fermé pour la topologie faible (Cf.(1,2,b)), donc faiblement compact. Le théorème de Krein-Milman nous indique donc que $\mathbf{Q}$ est le plus petit convexe faiblement fermé contenant les points extrêmaux de $\mathbf{Q}$.

Soit m un tel point extrêmal de $\mathbf{Q}$; parce que $\mathbf{Q}$ est une face de $\mathcal{K}$, m est aussi extrêmal dans $\mathcal{K}$; par conséquent la représentation quantique associée à m est irréductible (Cf. (1,2,c)).

De plus l'état quantique associé à chaque vecteur d'état est encore extrêmal (parce que tout vecteur unitaire est cyclique et engendre la même représentation).

(5,3) Existence d'états quantiques

Nous venons d'indiquer quelques propriétés de l'ensemble $\mathbf{Q}$ des états quantiques d'un groupe dynamique G; encore faut-il que $\mathbf{Q}$ ne soit pas vide - ce qui n'a rien d'évident a priori. C'est pourquoi nous allons étudier deux exemples (a) et (b) ou on peut effectivement exhiber un état. Dans ces deux cas, donc, il existe au moins une représentation quantique irréductible.

a) "spin"

Soit p un entier positif. Désignons par C_p le groupe multiplicatif des racines p-ièmes de l'unité.

Dans l'espace hilbertien $\mathbb{C}^2$ des matrices-colonnes complexes à deux éléments, considérons la sphère S^3 des ψ vérifiant:

$$\langle \psi, \psi \rangle = 1,$$

munie de sa difféologie de variété.

A chaque $\psi \in S^3$, associons le p-uple de points de S^3:

$$\zeta = \psi C_p$$

On définit ainsi un ensemble Ξ, que l'on munit de la difféologie quotient de celle de S^3 ; par hypothèse, $\psi \longmapsto \zeta$ est une subduction $S^3 \to \Xi$. Pour p=1, Ξ est la sphère S^3 elle-même; pour $p \geq 2$, Ξ est une variété de dimension 3, dite "espace lenticulaire".

Il existe une fibration principale A de Ξ par le tore, définie par:

$$A(z^p)(\psi C_p) = \psi z C_p$$

et une 1-forme ω de Ξ, définie par son image réciproque ω' sur S^3 :

$$\omega'(\psi)(\delta\psi) = \langle \psi, \delta\psi \rangle\, p/i$$

les axiomes i) et ii) des espaces quantiques (4,2,a) sont faciles à vérifier.

Il est clair d'autre part que le groupe $G = U(2)$ des matrices unitaires de format 2×2 admet une action ρ sur Ξ, définie par:

$$\rho(g)(\psi C_p) = [g\psi] C_p$$

que cette action est transitive et génératrice de la difféologie de Ξ, et qu'elle respecte la fibration et la forme ω (Cf.(4,3, iii bis)).

L'application moment réduit Ψ_p peut s'écrire:

$$\Psi_p(\zeta)(g)(\delta g) = \mathrm{Tr}(\bar{g}\, \delta g\, \psi \bar{\psi})\, p/i$$

où la notation

$$\bar{m}$$

désigne la conjuguée de la transposée d'une matrice complexe m.

Cette formule montre que la 1-forme $\Psi_p(\zeta)$ ne dépend de ζ que par la matrice dyade

$$\psi \bar{\psi}$$

et la caractérise. Les axiomes (4,3, iii bis et iv bis) en résultent: Ξ est un espace quantique, G un groupe dynamique.

La base X peut s'identifier à la sphère S^2 plongée dans $\mathbb{R}^3$; il suffit d'attribuer à un point x les trois coordonnées:

$$x_k = \mathrm{Tr}(\sigma_k \psi \bar{\psi})$$

formule où les σ_k désignent les trois **matrices de Pauli**:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

base de l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes de trace nulle. Les x_k sont bien les coordonnées d'un point de la sphère unité S^2, et caractérisent effectivement $\Psi_\rho(\zeta)$ par la formule:

$$\psi\,\bar{\psi} = \frac{1}{2}\left[I + \sum_{k=1}^{3} \sigma_k x_k \right]$$

où I désigne la matrice unité.

L'action coadjointe de $U(2)$ sur S^2 se fait par rotations; la forme symplectique invariante σ peut donc s'écrire, avec un coefficient s à déterminer:

$$\sigma(x)\,(\delta x)(\delta' x) = s \text{ determinant}\,(x, \delta x, \delta' x);$$

le calcul donne:

$$s = p/2.$$

Etudions maintenant les états quantiques m de G.
Tout rayon F de G est donné par la formule:

$$F(t) = \exp(i\Omega t)$$

Ω étant une matrice hermitienne; le hamiltonien associé h vaut:

$$h(\psi C_p) = \langle \psi, \Omega\,\psi \rangle\ p.$$

Dans le cas F_1: $\Omega = I$, la fonction hamiltonienne est constante et égale à p, si bien qu'on a nécessairement (Cf.(5,1,c)):

$$m(F_1(t)) = \exp(ipt)$$

. Dans le cas F_2: $\Omega = \sigma_3/2$, le hamiltonien vaut:

$$h(\psi C_p) = s\,x_3$$

et par conséquent on a :

$$m(F_2(t)) = \int \exp(i\omega t)\, d\mu(t)$$

μ étant une loi de probabilité dont le support est contenu dans l'intervalle fermé $[-s, +s]$.
Il est immédiat que l'on a

$$F_2(2\pi) = F_1(\pi)$$

d'où résulte

$$\int \exp(2i\pi\,\omega)\, d\mu(\omega) = \exp(i\,p\,\pi)$$

puis, en prenant la partie réelle:

$$\int \sin^2(\pi\omega)\, d\mu(\omega) = 0$$

si p est pair,

$$\int \cos^2(\pi\,\omega)\, d\mu(\omega) = 0$$

si p est impair.

La fonction continue positive $\sin^2(\pi\omega)$ [resp. $\cos^2(\pi\omega)$] dont l'intégrale est nulle doit s'annuler sur le support de μ ; il en résulte que ce support est discret, et contenu dans l'ensemble:

$$[-s, -s+1, \ldots s-1, s]$$

On peut effectivement trouver un état quantique en remarquant que, pour tout vecteur ϑ de S^3, la fonction m:

$$m(g) = \langle \vartheta, g\,\vartheta \rangle$$

est un état de G; donc aussi, grâce à (1,1,f), la fonction m_p :

$$m_p(g) = \langle \vartheta, g\,\vartheta \rangle^p$$

qui vérifie $m_p(F_1(t)) = \exp(ipt)$. Une vérification élémentaire montre que m_p est bien un état quantique.

La représentation unitaire de G associée, u_p, est donc une représentation quantique de G; à un isomorphisme unitaire près, u_p est indépendante du choix de ϑ.

♫ Il est clair qu'il existe un autre groupe dynamique de Ξ, à savoir $SU(2)$, sous-groupe de $U(2)$, muni de l'action ρ induite de la précédente.

Les raisonnements précédents peuvent se transcrire, à l'exception de ceux qui mettent en jeu le rayon F_1, qui n'appartient pas à l'étoile de $SU(2)$. Ce qui survit, dans ce cas, de l'analyse ci-dessus des états quantiques, c'est qu'ils associent à la fonction hamiltonienne $s x_3$ une mesure dont le support est contenu dans:

$$\left[-s,\ -s+\tfrac{1}{2},\ \ldots\ s-\tfrac{1}{2},\ s\right]$$

(ceci parce que F_2 est périodique de période 4π). De fait, pour $SU(2)$, les représentations u_k, $k \in [1, \ldots p]$, sont toutes quantiques.

b) " Relations de commutation "

Soit X un espace de Hilbert (ou préhilbertien) complexe.
Nous avons donné ci-dessus (4,4,d) une structure d'espace quantique au produit $\Xi = X \times \mathbb{T}$; $G = X \times \mathbb{R}$ a été muni d'une structure de groupe difféologique non commutatif:

$$(x, s)(x', s') = (x + x', s + s' + \sigma(x, x'))$$

(groupe de Heisenberg) et d'une action dynamique ρ sur Ξ.

Nous avons montré d'autre part (1,1,f) que la fonction m:

$$m(x, s) = \exp(is - \|x\|^2/2)$$

était un état du groupe G. Vérifions que m est quantique.

Considérons une famille finie de rayons F_k qui commutent deux à deux; on sait que chaque rayon s'écrit:

$$F_k(t) = (x_k t , s_k t)$$

$(x_k, s_k) \in G$; la condition de commutation s'écrivant:

$$\sigma(x_j , x_k) = 0 ;$$

les hamiltoniens h_k sont donnés par:

$$h_k(x, z) = s_k + 2\,\sigma(x_k , x);$$

compte tenu de ces relations, ainsi que de la formule:

$$\sigma(x , x') = g(x , -x'i)$$

l'inégalité à vérifier se réduit à:

$$\sum_k \bar{c}_j c_k \, e^{-g(x_k - x_j , x_k - x_j)/2} \leq \sup_x \Big| \sum_k c_k \, e^{i g(x_k , x)} \Big|^2$$

il suffit évidemment d'établir cette inéglité lorsque la variable x parcourt l'espace vectoriel réel E de dimension finie n engendré par les x_k ; la forme bilinéaire induite par g sur E lui confère une structure euclidienne; le choix d'une base orthonormale ramène l'inégalité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; or celle-ci y a été établie en (1, 4, c).

L'état m , ainsi que tout états subordonné m' , associe à chaque rayon F une fonction $m' \circ F$ qui est analytique réelle; il en résulte immédiatement que les <u>relations d'incertitude</u> (5,1,d) sont valables <u>pour tout couple de rayons</u> F_1 , F_2 .

Un calcul simple montre que l'état m associe au rayon F:

$$F(t) = (xt , st)$$

une loi de probabilité (gaussienne) dont la valeur moyenne est:

$$p = s$$

et l'écart-type

$$\sigma = \| x \| ;$$

La relation d'incertitude associé s'écrit donc:

$$\| x \| \, \| x' \| \geq |\sigma(x , x')| \qquad \forall\, x, x' \in X ;$$

l'état m a donc la propriété suivante: la <u>limite inférieure</u> de la relation d'incertitude est <u>effectivement atteinte</u> (par exemple si $x' = xi$).

♫ Réciproquement, ceci indique que la relation d'incertitude (5,1,d) ne peut pas être "améliorée" par un facteur >1 que l'on affecterait au second membre.

L'existence de l'état quantique m assure l'existence d'une <u>représentation quantique</u> u <u>du groupe de Heisenberg</u> – qui lui est associée; il est immédiat que les conditions (5,2,f) sont vérifiées par m et par tout rayon F, si bien qu'à tout élément :

$$(x,s) \in G$$

est associé un <u>self-adjoint</u> H vérifiant:

$$u(xt , st) = e^{itH} \qquad \forall t \in \mathbb{R} .$$

Dans le cas où la dimension de X est <u>finie</u>, u est la **représentation de Schrödinger**; c'est la seule représentation irréductible continue du groupe de Lie G.

INDEX

action (de groupe) 2 6 a
adjointe (action) 2 9 a
Arnold-Iglesias 2 7 d
base (d'un fibré) 2 7 a
Bochner-Raikov 1 4 c
caractère (quantification) 4 3 d
" 4 4 a
caractéristique (fonction) 1 4 c
cercles 4 2 a
coadjointe (représentation) 4 1 c
commutation (arcs) 3 3 j
commutation (rayons) 2 9 g
commutation (relations) 5 3 b
composantes (difféologiques) 2 3 a
composantes (groupe) 2 4 c
conditionnellementpositif 1 1 g
connexité (difféologique) 2 3 c
contact (forme) 4 2 c
cyclique (vecteur) 1 1 d
Denjoy-Poincaré (tore) 2 5 a
" 2 7 d
densité (opérateur) 5 2 d
dérivée de Lie 3 3 f
dérivée extérieure 3 3 a,b
difféologie 2 1 a
difféologie de groupe 2 4 a
difféologie d'espace vectoriel 2 9 e
difféologique (espace) 2 1 b
difféomorphisme 2 1 b
" 2 5 b
différentiable 2 1 b
Dirac (état) 1 4 a
discrète (difféologie) 2 2 a
Donato-Iglesias 2 8 a
dual (groupe) 1 4 c
dynamique (groupe) 4 3 a
entière (orbite) 4 5 b
espaces difféologiques 2 1 b
état (d'un groupe) 1 2 a
état continu 1 2 d
état mélangé 5 2 d
état quantique 5 1 a
état (vecteur) 5 2 b
étoile (d'un groupe) 2 9 a
exacte (forme) 3 3 d
exponentielle 2 9 c
extérieure (dérivée) 3 3 b
extrêmal (point) 1 2 c
face (d'un convexe) 1 2 d
faible (topologie) 1 2 b
fermée (forme) 3 3 d
fibration 2 7 a
finesse (difféologique) 2 2 a
fonctionnelle (difféologie) 2 2 d
formes (difféologiques) 3 1 b
forte (difféologie) 2 9 d
fortement connexe (groupe) 2 9 f
Fourier 1 4 c
Galois 2 5 a
générateur (groupe) 2 6 b
Gelfand-Naimark-Segal 1 1 d
Gibbs (états) 5 2 e
groupe (difféologique) 2 4 a
groupe générateur 2 6 b
hamiltonienne (fonction) 4 6 a
Heisenberg (groupe) 1 1 g
" 4 4 d
" 5 3 b
homogène (espace) 2 4 c
homotopie (difféologique) 2 3 a
homotopie (groupes) 2 3 d, e
" 2 8 a
image (difféologie) 2 2 b
image (état statistique) 1 3 f
image réciproque (difféologie) 2 2 b'
image réciproque (formes) 3 1 c
incertitude (relation) 5 1 d
" 5 3 b
induction 2 2 b'
induite (difféologie) 2 2 b'
induite (forme) 3 1 d
intérieur (produit) 3 3 e
invariante (mesure) 4 1
involution (rayons) 4 6 g
irréductible (représentation) 1 2 c
Klein (difféologie, espaces) 2 6 b
Krein-Milman 1 2 c
" 5 2 g
lacets 2 3 d
lenticulaire (espace) 5 3 a
Lie (algèbre) 2 9 b
Lie (dérivée) 3 3 f
Lie (groupe) 2 5 a
mélangé (état) 5 2 d
moment (application) 4 2 a
moment réduit 4 3 a
nilpotente (orbite) 4 5 a
0-formes 3 2 e
opérateur densité 5 2 d
opérateur self-adjoint 5 2 f
orbites 2 6 b
" 4 3 c
p-formes 3 1
Pauli (matrices) 5 3 a
plaques 2 1 a
Pontryagin 1 4 c
positif (type) 1 1 b
principal (fibré, fibration) 2 7 a
probabilité (loi) 1 4 b
produit (difféologique) 2 2 c'
quadratique (irrationnel) 2 5 a
quantifiable (orbite) 4 4 a
quantique (espace) 4 2 a
quantique (état) 5 1 a
quantique (forme) 4 2 a
quantique (représentation) 5 2 c
quantique (variété) 4 2 c
quantomorphismes 4 2 a
quotient (difféologie) 2 2 b
quotient (état statistique) 1 3 f
rayon 2 9 a
relations de commutation 5 3 b
relations d'incertitude 5 1 d
" 5 3 b
représentation coadjointe 4 1 c
représentation quantique 5 2 c
revêtement 2 8
revêtement universel 2 8 a
Schrödinger (représentation) 5 3 b
self-adjoint (opérateur) 5 2 f
simplement connexe 2 3 d
simpliciale (orbite) 4 5
somme (difféologique) 2 2 c
spectrale (mesure) 5 2 f
sphères 5 3 a
spin 5 3 a
statistique (espace, groupe) 1 3 a
statistique (état) 1 3 c
statistique (morphisme) 1 3 f
structural (groupe) 2 7 a
subduction 2 2 b
subordonnée (fonction) 1 1 a
symplectique (variété) 4 3 e
translations 4 1
tore 1 3 a
Tychonov-Alaoglu 1 2 b
type positif 1 1 b
ultrafiltre 1 4 b
universel (revêtement) 2 8 a
valeur (forme) 3 2 a
variété 2 1 a
vecteur (difféologique) 2 9 c
vecteur cyclique 1 1 d
vecteur de Reeb 4 2 c
vecteur d'état 5 2 b