Physique
Théorique
Marseille

# GRAMMAIRE DE LA NATURE

**J-M. Souriau**

Unité Propre de Recherche 7061

Septembre 1989

CPT-89/P.2297

**CNRS Luminy** – Case 907 – CPT – F 13288 Marseille Cedex 9 – France

# *grammaire de la nature*

Jean-Marie Souriau

(prétirage CPT 2297, septembre 1989)



## 1 Lois et modèles

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la physique théorique s'exprimait essentiellement par des *lois:* loi de la gravitation, loi de Mariotte, équations de Maxwell, etc. Tout cela ronronnait un peu; comme progrès, on n'envisageait que quelques ajustements des lois connues.

Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, apparition de nouveautés retentissantes: relativité, théorie des quanta.

Les lois classiques ne sont pas seulement modifiées, mais détruites; tout doit être repris à zéro, même le bon sens le plus évident. Scandale!

Pourtant cette situation n'était pas sans analogies antérieures.

Prenons un exemple. En plus de deux mille ans, les mathématiciens ont réussi à donner un sens précis à la notion de *volume;* au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, la notion de *pression* était à peu près dégagée,



la *loi de Boyle-Mariotte* reliait volume et pression d'un échantillon gazeux enfermé hermétiquement([1]).

Essayons maintenant d'appliquer cette loi à autre chose qu'un gaz, par exemple à un morceau de caoutchouc. Il est clair que ça ne marche pas: si on force une gomme à entrer dans un récipient tordu, elle presse plus sur les parois à certains endroit qu'à d'autres; il n'y a pas de pression d'ensemble comme dans le cas d'un gaz.

Il ne suffit donc pas de modifier la loi de Mariotte pour l'appliquer au caoutchouc: il va falloir élaborer de nouveaux concepts, choisir des mots nouveaux pour les nommer: contraintes, déformations, cisaillement, torsion, etc.

Ce n'est pas tout de nommer; il faut aussi organiser ces mots en une "théorie", c'est-à-dire en une description *non contradictoire et prédictive* - contenant en particulier un substitut de la loi de Mariotte. Une fois ce problème résolu, on disposera d'un *modèle* de *milieu élastique*.

Ce mot "*modèle*" est sanctionné par l'usage. Mais attention! le même mot est parfois pris dans des acceptions très différentes.

Pour un biologiste, par exemple, un *modèle animal*, c'est l'études des réactions provoquées chez un animal par une drogue — par opposition aux réactions de l'organisme humain.

Pour un peintre, bien sûr, le modèle, c'est la personne à peindre, et pas la peinture: l'usage du mot est donc *complètement inversé* quand on passe du peintre au physicien.

Le modèle du physicien, lui, peut prendre une forme parfaitement abstraite et mathématique. Ceci pour être sûr qu'il ne contient pas d'ambiguïté ou de contradiction interne. Par exemple les termes "contrainte", "déformation" que nous venons de citer recouvrent des objets mathématiques nouveaux, que l'on appelle *tenseurs* ([2]).

Mais n'oublions pas que le mot "abstrait" signifie "tiré de": tout modèle mathématique est "abstrait du réel", via les perceptions, les expériences, les mesures.

Il faut pouvoir revenir au réel: le modèle ne sera achevé que lorsque la théorie sera accompagnée d'un mode d'emploi, de règles permettant de faire des prédictions sur l'objet étudié. Seule la concordance de ces prédictions avec les observations peut conférer au modèle une certaine valeur de *vérité*.

Vérité qui ne deviendra assurée que lorsque beaucoup de telles concordances auront été observées; alors qu'une seule discordance bien établie suffit à montrer la "fausseté" du modèle ([3]) .

Voila pourquoi personne n'ose dire qu'un modèle soit "absolument vrai"; on peut seulement constater que tel modèle colle bien à la réalité dans telles conditions.

C'est le cas par exemple des modèles de milieux continus qui ont été élaborés, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, par Cauchy, Lamé, et bien d'autres ensuite; modèles qui continuent d'être perfectionnés — parce qu'ils en ont grand besoin.

Un nouveau modèle, ça peut donc être beaucoup plus qu'une nouvelle loi: a priori, on a le droit de tout casser, de tout reconstruire par un acte créateur libre.

Acte libre.. mais dont la valeur ne résultera que de la soumission à d'innombrables contraintes: le modèle doit être cohérent; les règles d'application à la réalité doivent être formulées sans ambiguïté; elles doivent coller à l'expérience; enfin le modèle doit apporter quelque chose de neuf.

---

[1] Quand on comprime le gaz, volume et pression varient en sens inverse, de façon que le produit de ces deux nombres reste constant.

[2] Créés à cette occasion, les tenseurs ont eu une vaste postérité en mathématiques pures aussi bien qu'en physique; ils sont l'instrument de travail principal pour la théorie de la relativité (voir le §14).

[3] *Falsification*, au sens de Popper; ne pas oublier que l'objet d'une telle falsification est un modèle, pas une simple affirmation.

Ce travail du théoricien ressemble à celui d'un sculpteur qui veut créer une statue "ressemblante", et qui a choisi pour cela le matériau le plus dur et le plus difficile à travailler. Son oeuvre doit d'abord exister, être solide; elle doit pouvoir être montrée; elle doit être ressemblante, si tel a été le choix du sculpteur; enfin elle doit être belle.

Or on fait bien de la peinture et de la sculpture non figuratives; le théoricien a-t-il lui aussi ses "modèles non figuratifs" ? Des modèles qui respectent les règles de cohérence, mais qu'il oublie, volontairement ou non, de comparer à une réalité matérielle ?

Oui, bien sûr. Historiquement, c'est ainsi que se sont constituées les "mathématiques pures". A quoi bonnes ? La réponse est la même que pour les autres formes d'art: elles sont ludiques; comme les jeux d'un chaton ou d'un enfant, elles sont apprentissage, plaisir, passion.

Revenons à la physique. Un modèle nouveau étant élaboré (structure logico-mathématique + règles d'application à la réalité), il reste plusieurs choses à faire:

— délimiter son domaine de validité;

— comprendre comment le nouveau modèle et les modèles anciens ont pu donner chacune une description satisfaisante d'un même objet matériel[4]; — découvrir aussi pourquoi nous, *sujets*, avons successivement choisi l'ancien et le nouveau modèle; ce qui fait apparaître une certaine subjectivité des sciences "exactes".

Certains modèles ont été élaborés pour répondre à des problèmes techniques précis.

Moins compréhensible est l'apparition de modèles fort étudiés sans qu'on leur ait découvert *aucune corrélation avec le réel* (trous noirs, supercordes, corde cosmiques, géométries non commutatives, etc), avec pourtant une ambition exprimée qui n'est pas celle des mathématiques pures. La sociologie des milieux scientifiques est impliquée: espoir d'une divine surprise, comme cela se produit parfois; modes lancées par quelques grands couturiers de la physique; systèmes des thèses et des patrons, des publications et des "referee"; etc.

## 2 Modèles contemporains, modèles modernes et modèles antiques

Il ne faut pas oublier que la physique qui était "classique" à la fin du XIX$^{ème}$ siècle était issue d'une période de création orageuse: aux "temps modernes", de nouveaux modèles ont supplanté les modèles antiques — la Physique d'Aristote tout particulièrement. La physique mathématique la plus classique, telles qu'on peut la lire par exemple dans les "Principia" de Newton (1686), a été un modèle révolutionnaire; mais le temps faisant son oeuvre, la révolution est devenue scolastique.

On constate ainsi une certaine alternance, reproduisant au bout de quelques cycles un statut analogue de la connaissance.

Deux exemples méritent d'être comparés: la théorie pythagoricienne des Eléments, décrite par Platon dans Le Timée (IV$^{ème}$ siècle avant JC); et la théorie contemporaine des Particules Elementaires.

Chez Platon, les *quatre éléments* — terre, feu, air, eau —, constitutifs de toute matière, sont associés aux quatre polyèdres réguliers [5]: cube, tétraèdre, octaèdre, icosaèdre, possédant respectivement 8 , 4 , 6 et 12 sommets. La découverte d'un cinquième polyèdre régulier (le dodécaèdre, à

---

[4] Un bon modèle de milieu élastique doit s'appliquer aussi bien à un gaz parfait qu'à du caoutchouc.

[5] Quand dit-on qu'un polyèdre est régulier ? quand il présente *suffisamment de symétries*; nous allons revenir sur ce point.



20 sommets) suggère l'existence d'une cinquième espèce de matière qu'on place, à tout hasard, dans le ciel, et qu'on appelle la *quintessence*. François Rabelais avait choisi le pseudonyme: "Alcofribas Nasier, abstracteur de quintessence".

Dans la théorie admise aujourd'hui, des *multiplets* (figures régulières à 3 , 8 , 24 , ... sommets) sont associés aux divers types de *particules élémentaires* (quarks, baryons, leptons, etc.), constitutives de toute matière. En plus des particules déjà observées, d'autres sont recherchées par les Alcofribas contemporains — qui parfois trouvent leur quintessence. Les objets nouveaux qu'on n'a pas pu observer, on les place à tout hasard dans le ciel [6].

Le parallélisme entre éléments pythagoriciens et particules élémentaires contemporaines est frappant — indépendamment de toute valeur de vérité des deux théories. Qu'y a-t-il au fond de commun entre eux ? *une certaine structure*, qui porte plusieurs noms:

— le plus intuitif, c'est le mot *symétrie:*

— le plus descriptif de l'activité de la pensée, c'est le mot *géométrie:*

— l'expression la plus élaborée, c'est la *théorie des groupes*.

Nous proposons ici la formule:

$$\boxed{\text{symétrie} = \text{géométrie} = \text{groupe}}$$

La *symétrie*, tout le monde pense en avoir une idée — dans les divers domaines où on la reconnait: pas seulement dans les sciences dures, mais aussi dans la structure des êtres vivants (animaux, plantes, virus), dans les arts (symétrie des azulejos de l'Alhambra et des coupoles d'Ispahan; symétrie musicale, comme dans les fugues miroir de Bach); etc.

La *géométrie*, la plupart du temps, n'évoque que quelques activités à moitié oubliées — et ennuyeuses — que l'on a dû subir; le fameux "triangle ABC" par exemple.

Quant à la *théorie des groupes*, seuls les mathématiciens professionnels se sentent concernés; un essai de l'introduire dans l'enseignement secondaire n'a rien donné et a été abandonné; pourtant c'est *une clef irremplaçable pour la connaissance de l'univers — microscopique et macroscopique*. C'est ce que nous allons essayer de montrer.

## 3 Symétrie, perfection et harmonie

Dessinons un carré. Il est facile d'y détecter un certain nombre de symétries — au sens courant du terme. Par exemple on trouve tout de suite quatre "axes de symétrie".

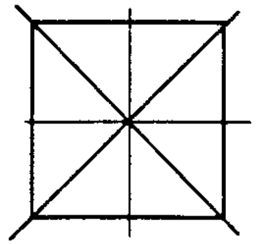


fig 1

---

[6] les "monopoles magnétiques" par exemple; on a supposé qu'ils existaient ou qu'ils auraient existé quelque part dans les régions lointaines de l'univers.

D'autres symétries sont aussi évidentes, par exemple une rotation d'un quart de tour dans un sens ou dans l'autre, ou la symétrie par rapport au centre.

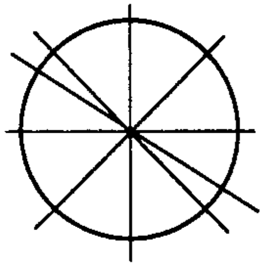


fig 2

Dans le cas du cercle, toutes ces symétries se retrouvent — et d'autres encore: toutes les droites passant par le centre sont des axes de symétries; de même toutes les rotations autour du centre. Il y a donc *plus de symétries* dans le cercle que dans le carré.

Dans l'antiquité, certaines figures étaient qualifiées de "parfaites"; ce sont celles qui possèdent beaucoup de symétries, comme justement les polygones et les polyèdres réguliers; les plus parfaites étaient les plus symétriques, telles que le cercle dans le plan, la sphère dans l'espace.

La théorie pythagoricienne permettait de découvrir sous l'imperfection apparente de la matière une perfection cachée, celle des polyèdres représentant les Eléments. Et puisque les polyèdres étaient accessibles à la pensée pure, la matière le devenait aussi.

On distingue une même démarche chez Hipparque (IIème siècle avant JC), qui a décrit le mouvement imparfait des astres par *composition de mouvements uniformes sur des cercles* — mouvements évidemment parfaits.

Cette composition mathématique était censée réalisée dans le ciel par un *assemblage de sphères* transparentes, articulées les unes sur les autres. En grec, "assemblage" pouvait se dire "harmonie"; c'est pourquoi cette théorie s'est appelée *harmonie des sphères.*

L'ambition du système pythagoricien, qui voulait embrasser dans un même mouvement de pensée l'assemblage des astres comme celui des sons *(harmonie dorienne)*, explique le sens que nous donnons aujourd'hui au mot harmonie.

Une remarque: nous pouvons voir dans le ciel sept objets mobiles (la Lune, Mars, Mercure, Jupiter, Vénus, Saturne et le Soleil; pensez aux sept jours de la semaine). De même la gamme pythagoricienne se devait de contenir sept notes — et nous ne l'avons pas récusée. Vive le nombre 7 !

Et pourquoi pas 5 ou 10 ? Le délire de la "numérologie" a quelques sources historiquement respectables, comme l'observation attentive du ciel.

L'harmonie des sphères était d'ailleurs fort efficace, sous la forme que nous a transmise l'oeuvre de Ptolémée au IIème siècle après JC ("Harmoniques", "Traité mathématique" (7)); elle permet d'obtenir des éphémérides prédisant la position de la lune, du soleil et des planètes avec une précision meilleure qu'un degré.

Ce calcul a été pratiqué pendant quinze siècles; il n'a été supplanté que par le calcul de Kepler, atteignant la minute d'angle.

Les prédictions relatives à chaque planète se calculent à partir d'un certain nombre d'*éléments*, qui nous semblent arbitraires. Réfutant cet arbitraire, Kepler cherchait aussi à *calculer* ces éléments; à partir de quoi ? en bon pythagoricien, en associant à chaque planète un polyèdre. Mais là, il n'a pas réussi...

[7] Connu sous le nom arabo-grec "Almageste" (le plus grand ).



Abandonnée provisoirement en astronomie, la méthode d'Hipparque et de Ptolémée est toujours utilisée: la représentation d'un mouvement arbitraire par un assemblage de mouvements circulaires uniformes s'appelle aujourd'hui *analyse harmonique.*

Cette branche des mathématiques est fondamentale dans diverses techniques: acoustique ("sons harmoniques"), optique, médecine (c'est un ordinateur utilisant l'analyse harmonique qui produit les images du *scanner).*

### 4 Les racines de l'espace

On dit parfois qu'un matériau comme l'eau pure ou un cristal parfait est *homogène;* on entend par là aujourd'hui que cette matière "a partout les mêmes propriétés". Mêmes propriétés donc en deux points $A$ et $B$, quels qu'ils soient.

Affirmer que la matière a *les mêmes propriétés* en $A$ et $B$, c'est un truisme vide si $A$ et $B$ sont les mêmes; cela ne devient significatif que si ces deux points sont *différents.*

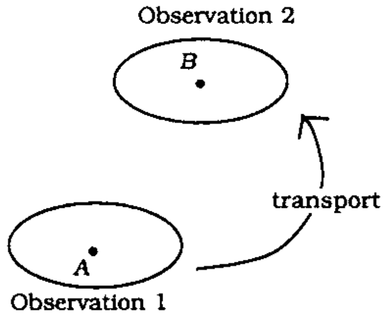



fig 3

Mais alors l'affirmation est paradoxale: si $A$ n'est pas $B$, la matière en $A$ n'est pas la matière en $B$; et pourtant nous prenons comme critère le fait que la matière en $A$ "a les mêmes propriétés" que la matière en $B$. Ceci implique que les observations que nous avons faites en $A$, nous sachions comment les *transporter* en $B$, pour pouvoir comparer. C'est la *syntaxe de ce transport* que nous allons examiner d'abord.

Analysons pour commencer le cas le plus simple, l'espace géométrique pur, vide.

Deux points $A$ et $B$ suffisent à définir une opération qui "déplace" tout l'espace, et que l'on appelle "translation" (transport) ou "vecteur" (véhicule). Par définition, la *translation* $\overrightarrow{AB}$ envoie $A$ sur $B$; où transportera-t-elle un autre point $C$ ? *En* $D$, *tel que* $ABDC$ soit un parallélogramme (fig 4). Les éléments de la géométrie d'Euclide apparaissent: triangle $ABC$, parallèles, etc.

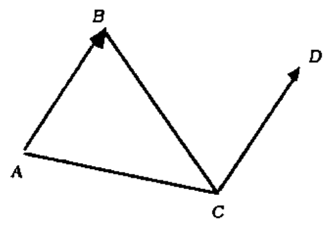



fig 4

Les translations ne sont pas les seules opérations intéressantes: on peut considérer aussi les *rotations* — et plus généralement ce qu'on appelle les *déplacements*, implicitement évoqués dans les Eléments d'Euclide (III$^{ème}$ siècle avant JC).

Il se trouve que cette *analyse de la géométrie en langage d'opérations* évoque l'acquisition normale de l'espace chez les enfants.

Dans l'épistémologie génétique selon Piaget, l'intelligence se structure par stades successifs: les opérations sur les objets d'un stade constituant les objets du stade suivant.

Vous connaissez l'histoire de l'enfant qui refuse de dire "*A*" — en expliquant qu'il ne l'aura pas sitôt dit qu'on lui demandera de dire "*Bé*".

Ici, nous avons commencé par concevoir les points (premier stade). Sitôt que l'opération "déplacement" est *nommée* — donc réduite à l'état d'*objet* du deuxième stade, nous n'échappons pas à l'examen des *opérations sur les déplacements*.

Soit $x$ un point, $g$ un déplacement. Le point obtenu en faisant agir $g$ sur $x$ s'écrit, suivant l'usage mathématique:

$$g(x)$$

Ce nouveau point $y = g(x)$ peut subir un nouveau déplacement $g'$, ce qui produira le point $z = g'(y)$. En substituant la valeur de $y$, nous obtenons:

$$z = g'\left(g(x)\right)$$

La remarque essentielle, c'est qu'on peut *oublier* le point intermédiaire $y$, et passer directement de $x$ à $z$ par un nouveau déplacement. Déplacement *composé* de $g$ et de $g'$, que nous allons écrire:

$$g'g$$

afin de produire une écriture simple à retenir:

$$\boxed{g'g\ (x) = g'\left(g(x)\right)}$$

Dans son carnet de notes, le mathématicien va écrire quelques propriétés de la composition; des choses comme "l'associativité", qui sont souvent rabâchées à l'école, et dont il n'est pas utile de rappeler ici le détail.

En mathématiques, *l'oubli est une activité essentielle*, complémentaire de la construction des opérations.

Ici, le mathématicien va oublier les points, tout ce qui lui a servir à *construire* la composition. Il choisit de ne se souvenir que de son carnet de notes, des règles écrites dessus.

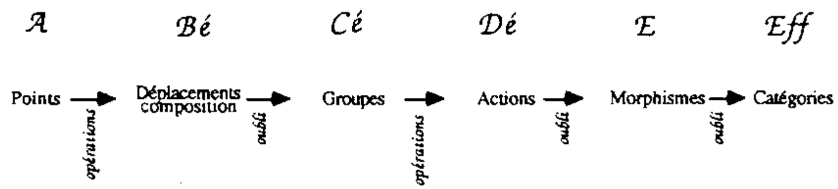


Il dit, satisfait: "je vais appeler ça un *groupe*". Avec toujours cette manie des mathématiciens de choisir des mots courants et de les détourner de leur sens commun.

Un *groupe*, désormais, pour lui (et pour nous dans la suite de ce texte), c'est donc fait avec des objets $g$, $g'$ ...etc. Tout ce qu'on a retenu de la géométrie, c'est que ces objets (les *éléments* du groupe) se composent deux à deux (on appelle ça la "*loi* du groupe") et que cette composition respecte les règles écrites sur le petit carnet (les *axiomes* des groupes).

Du coup, il va y avoir *beaucoup de groupes*, qu'il faudra nommer pour les distinguer les uns des autres. Par exemple, *les* déplacements, c'est maintenant *le groupe d'Euclide*.

Ça y est, nous avons dit "*Bé*" et même "*Cé*", nous sommes passés au troisième stade. Nous sommes devenus capables de manipuler la loi du groupe d'Euclide sans nous encombrer du fardeau de l'espace.




Et on peut continuer, *Dé*, *E*, *Eff*, etc. Pour quoi faire?

Revenons à la géométrie classique; considérons une *figure* $f$ quelconque — dessinée dans l'espace — et un déplacement $g$ ; nous savons évidemment construire, point par point, la *nouvelle figure*

$$g(f),$$

image par $g$ de la figure $f$ ; c'est ce que fait Euclide quand il déplace un triangle pour le faire coïncider avec un autre.

Il est clair que la règle de composition

$$g'g\ (x) = g'\left(g(x)\right)$$

reste vraie, que la lettre $x$ désigne un point ou une figure. Le mathématicien, cohérent avec lui-même comme d'habitude, va dire: "c'est le même groupe", qui *agit* sur deux *espaces*.

Aussitôt il va ouvrir un nouveau folio dans son carnet, où il va parler d'*action* de groupe, avec les règles communes aux deux cas envisagés. En l'honneur d'Euclide dont la tâche était de perfectionner l'art de l'arpenteur (γεωμετρια), il appellera *géométrie* de $X$ l'action d'un groupe $G$ sur un espace $X$ — *quels que soient* $G$ *et* $X$ ; les éléments de $X$ s'appelleront *objets géométriques*.

C'est l'idée audacieuse qui a été proposée en 1872 par le jeune Felix Klein; elle donne son sens à l'équivalence épistémologique: "géométrie = groupe" que nous avons proposée plus haut.

Mais à quoi bon ainsi tout retourner, en nous occupant par exemple des opérations sur les objets avant même d'avoir défini ces objets? *C'est bon pour construire de nouveaux modèles.*

La mécanique et la physique ont montré l'utilité d'objets mathématiques bizarres, comme les "torseurs" et les "champs", que l'on n'arrive ni à dessiner ni à localiser. Mais on sait faire agir sur eux le groupe d'Euclide, ce sont donc des *objets euclidiens*.

Du point de vue épistémologique, les torseurs ou les champs sont maintenant *insérés dans l'espace — en ce sens qu'ils appartiennent à la même géométrie que les figures tracées dans l'espace.*

Autre possibilité nouvelle: au lieu de changer d'espace, on peut changer de groupe: il existe par exemple un "groupe d'Euclide revêtu", qui ressemble beaucoup au groupe d'Euclide usuel, mais qui est doué d'une subtile richesse supplémentaire.

Il agit sur l'espace; il permet aussi de définir des objets géométriques nouveaux, dont le comportement est singulier: ils ne font qu'un demi-tour quand les points de l'espace font un tour complet. Curiosité mathématique ? Pas seulement: l'expérience montre que les neutrons polarisés ont un comportement de ce type.

Même architecture pour la théorie contemporaine des *particules élémentaires:* des groupes nouveaux, découverts d'abord mathématiquement (comme l'ont été les polyèdres antiques), sont essayés a priori *(groupes de jauge).*

Les actions de ces groupes vont produire des *multiplets* permettant de classer — avec plus ou moins de bonheur — les diverses particules observées effectivement: par exemple les *quarks*, les *baryons*, constituants supposés de la matière ordinaire.

## 5 Symétries cachées

Dans l'exemple des figures 1 et 2 tracées plus haut, toutes les *symétries* que nous avons remarquées sont des *déplacements*, déplacements qui font coïncider la figure avec elle-même ([8]): une symétrie de la figure $f$, c'est un déplacement $g$ qui vérifie la condition:

$$g(f) = f$$

Cette "équation" $g(f) = f$ permet de définir avec précision ce que sont les symétries de figures $f$ très diverses. Ainsi une hélice circulaire (fig 5) possède *une infinité de symétries* qui la "vissent" sur elle-même.

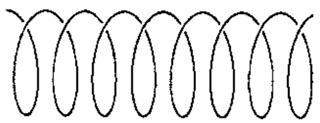


fig 5

On peut même parler des *symétries de l'espace:* elles constituent évidemment *le groupe d'Euclide tout entier.*

L'extension du mot "symétrie" est maintenant évidente: il suffit d'oublier un peu.

Si $x$ est un objet géométrique (associé donc à un groupe), on continuera à appeler *symétrie de* $x$ tout élément $g$ du groupe qui vérifie

$$g(x) = x \quad ([9]).$$

Maintenant, les symétries d'un torseur ou d'un champ, ça existe. Et nous allons en rencontrer beaucoup d'autres.

---

[8] Ce sont des rotations autour d'une droite du plan de la figure ou d'une droite perpendiculaire à ce plan.

[9] Ces symétries constituent elles-mêmes un groupe, appelé *stabilisateur* de $x$.



## 6 Et le temps ?

La phrase de Newton, dans les Principia: *"le temps absolu, vrai et mathématique, coule uniformément"*, peut se paraphraser de la façon suivante: le temps, comme l'espace, possède un groupe de symétries; ces symétries sont les "translations temporelles", qui caractérisent l'égalité des intervalles de temps et permettent aussi d'en faire l'addition. Donc de *mesurer* le temps, de concevoir un chronomètre absolu, vrai et mathématique.

*Géométrie du temps*, donc, qu'il est commode d'associer dans une même pensée avec celle de *l'espace:* on produit ainsi la *géométrie de l'espace-temps.*

Qu'est-ce que *l'espace-temps?* c'est le cadre de notre vie, là par exemple où nous fixons nos rendez-vous (ce soir à Samarcande: le lieu *et* l'heure doivent être les bons).

Quel est le groupe? un déplacement et une translation temporelle *énoncés ensemble* constituent un élément du *groupe d'Aristote.* Dans le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & \text{Translations temporelles} \arrow[d] \\ \text{Euclide} \arrow[r] & \text{Aristote} \end{tikzcd}$$

les flèches indiquent des parties du groupe d'Aristote qui sont elle-mêmes des groupes: on appelle ça des *sous-groupes.*

Ainsi l'espace-temps se trouve muni de la "géométrie aristotélicienne".

En fait, dès le XVII[ème] siècle, les expériences sur les mouvements ont montré qu'on perdait quelque chose en négligeant le temps pour concevoir l'espace.

Dans le "Dialogue sur les principaux systèmes du Monde" (1632), Galilée affirme que les expériences faites dans un bateau en mouvement uniforme donnent le même résultat que si le bateau était à l'ancre (exemple: la chute d'un corps lâché en haut d'un mat et qui tombe à son pied quelle que soit la vitesse du bateau).

Bien entendu Galilée, comme Giordano Bruno, entendait montrer que le navire terrestre pouvait lui aussi être en mouvement dans l'espace — nonobstant le témoignage de nos sens.

Cette expérience de pensée a été vérifiée expérimentalement, vers 1640, à Marseille, par Gassendi.

Ces opérations de mise en mouvement ne possèdent pas de désignation française caractéristique; nous utiliserons ici le mot anglais, "boost", fort expressif.

Les boosts permettent de compléter les "symétries de l'espace-temps"; le groupe d'Aristote est élargi par le *groupe de Galilée:*

$$\begin{tikzcd} & \text{Translations temporelles} \arrow[d] & \\ \text{Euclide} \arrow[r] & \text{Galilée} & \text{Boosts} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ce diagramme rappelle que les déplacements, les translations temporelles, les boosts constituent trois *sous-groupes*. Et aussi qu'on peut tous les composer deux à deux en restant dans le groupe de Galilée.

Ceci n'a rien d'évident: qu'obtient-on par exemple, en composant un déplacement et un boost ? ou encore un boost et un déplacement ? Le résultat dépend-il de l'ordre des termes ?

Emmanuel Kant pensait que de tels problèmes étaient inscrits dans notre "sensibilité" et qu'il suffisait de lire la réponse. Il est plus sûr d'utiliser l'écriture [10] .

## 7 Relativités

Ayant disserté sur le vide, avons nous pour autant résolu le paradoxe de l'eau claire ? Il faut évidemment s'attaquer au problème de la matière, franchir le seuil de la physique.

La physique traite du *possible:* parmi toutes les scénarios imaginables pour décrire l'univers, la physique distingue — en principe — ce qui est possible de ce qui ne l'est pas.

Un physicien peut décrire une expérience — mais doit bien se garder d'affirmer quelque chose sur le lieu et la date de cette expérience. D'abord ce n'est pas son affaire — mais par exemple celle d'un historien qui en principe traite du *réel*. Plus fondamentalement, un physicien qui donnerait ces précisions ne serait plus crédible. Pourquoi ? parce que la première qualité d'une expérience de physique, c'est d'être *reproductible*, n'importe où, n'importe quand.

De quelle reproductibilité s'agit-il ? Lorsqu'on affirme "cette expérience a été reproduite plusieurs fois, dans tel ou tel labo", il ne s'agit évidemment pas de la *même* expérience — puisque ce n'était pas au *même* endroit et à la *même* date.

Il s'agit seulement de *correspondances* entre expériences; correspondances entre *points de l'espace-temps* (comme nous dirions par exemple: "ici et demain") , mais correspondances aussi entre *comportements de la matière*.

Toute expérience faite aujourd'hui sera encore possible demain - mais pas nécessairement refaite; autrement dit ces correspondances concernent le *possible* — pas le *réel*.

Pour de simples raisons de cohérence logique (dans le cas d'expériences multiples), ces transformations doivent constituer un *groupe*. Ainsi:

> La physique ne peut être objective que s'il existe *un groupe* $G$ , agissant *à la fois sur la matière, l'espace et le temps* , qui est constitué de *symétries du possible.*

C'est ce qu'on appelle — pour des raisons historiques — *principe de relativité.*

Le choix du groupe est évidemment essentiel. Dans le cas du groupe de Galilée, on dit *relativité galiléenne.*

Nous allons envisager plusieurs variantes de ce principe de relativité, avec des groupes différents [11] .

10 Le *calcul matriciel* élémentaire.

11 Les *groupe de jauge* évoqués plus haut doivent se concevoir comme *sous-groupes* du groupe de relativité. Ils agissent sur la matière, en ne touchant pas à l'espace-temps (ce type d'action est autorisé par le carnet à axiomes).



C'est le principe de relativité qui va *insérer la matière dans l'espace et le temps*, en donnant son sens à la phrase de Newton: *"Les temps et les espaces n'ont d'autres lieux qu'eux-mêmes, & ils sont les lieux de toutes les choses".*

Attention! Le principe de relativité, *c'est* l'action d'un groupe sur la matière en même temps que sur l'espace; *ce n'est pas* la niaiserie "tout est relatif"... Relatif à quoi? on emploie souvent le mot "référentiel" sans dire précisément de quoi il s'agit.

Or le discours sur les référentiels ne peut être qu'allusif, tant qu'un groupe n'a pas été mis en évidence; mais alors ce discours n'est plus nécessaire [12].

Le physicien — comme le comédien — est enfermé dans un paradoxe: quand il est théoricien, il est condamné à ne connaitre que de l'infinité des *possibles;* expérimentateur, il s'occupe de faits *réels* et uniques.

Isolée, chacune de ces deux activités n'est qu'un jeu; la *connaissance de la nature* nait de leur confrontation.

Cette confrontation qui garantit l'objectivité de la physique — donc la légitimité de son existence — doit respecter une certaine *règle*. Cette règle, écrite, c'est le *principe de relativité*. Pour l'écrire complètement, il faut donc recourir aux *axiomes des groupes*.

C'est ainsi que la théorie des groupes devient la *grammaire de la nature.*

## 8 Le secret des cristaux

Une première utilisation du principe de relativité, c'est de *donner un sens* à l'affirmation selon laquelle un milieu $m$ est "homogène": cela signifie que *les translations* $T$ ne modifient pas le milieu, ce qui s'écrit:

$$T(m) = m;$$

autrement dit, m est homogène lorsque ses symétries (dans le groupe d'Euclide) contiennent les translations [13].

De même un phénomène est dit "stationnaire" si ses symétries contiennent les translations de temps; "homogène et isotrope" s'il est invariant par le groupe d'Euclide. Etc.

Belle définition. Mais existe-t-il réellement un milieu homogène, en dehors du vide? Est-ce simplement possible? Pas sûr. Occupons nous donc plutôt des symétries d'un objet réel — d'un cristal $c$ par exemple.

Il va falloir idéaliser; supposons le cristal sans défaut, traitons-le comme s'il était sans limites.

A première vue, il va apparaitre comme homogène. Mais si nous croyons qu'il est constitué d'un empilement d'atomes, ce ne sera certainement plus vrai: si une translation $T$ est une symétrie du cristal:

12 Il garde probablement un rôle poétique. Il y a une parenté claire entre les "mollusques de référence" d'Albert Einstein et les "montres molles" de Salvador Dali.

13 On suppose que $m$ fait partie du *réel*; le principe de relativité nous indique que $T(m)$ est *possible;* nous écrivons ici que $T(m)$ est *réel*.

$T(c) = c.$

$T$ devra transporter chaque atome sur un atome identique. Le groupe de ces translations va donc caractériser les "mailles" du réseau cristallin.

C'est à partir de cette considération qu'on est parvenu à classer, dans le groupe d'Euclide, tous les groupes de symétrie mathématiquement possibles pour un cristal; on a ainsi découvert, a priori, 230 espèces de groupes — on les appelle *groupes cristallographiques* (Schönflies , 1871).

Cet effort de modélisation était d'autant plus remarquable qu'à l'époque "l'hypothèse atomique" n'était pas encore généralement admise; la "cristallographie assistée par les groupes" devenait précisément l'un de ses tests.

L'expérience montre que chaque cristal rencontré dans la nature (ou produit artificiellement) possède son propre groupe de symétrie, qui est bien l'un de ces groupes cristallographiques classés a priori.

D'où une *classification des cristaux*, complète et indépendante de toute idée préconçue. A comparer avec la taxonomie des espèces végétales ou animales.

Nous avons un exemple de modèle mathématique (celui des symétries d'espace-temps) qui a la vertu de classer des objets réels (les cristaux que l'on pourra découvrir dans les mines les plus reculées ou sur la planète Mars) sans qu'il soit nécessaire pour autant de connaitre leur structure intime, ni même leurs propriétés physiques telles que l'élasticité. Un modèle ayant donc *vocation à l'universalité*.

La découverte de "modèles universels" est un progrès essentiel en physique, même appliquée: par exemple l'appartenance "abstraite" d'un cristal à tel ou tel groupe autorisera ou interdira un phénomène "concret" comme la piézo-électricité (Pierre Curie).

La construction de tels modèles est donc l'une des ambitions les plus hautes de la physique théorique; la théorie des groupes permet ainsi d'accéder à l'universalité sans attendre que la physique soit achevée.

## 9 Relativité et technologie

Un liquide est constitué d'atomes qui se regroupent de façon très compliquée. Mais si on se place à suffisamment grande échelle, tous les déplacements euclidiens apparaissent comme des symétries: macroscopiquement, le liquide est *homogène et isotrope*. Même symétrie macroscopique pour les liquides solidifiés tels que le verre ou les métaux usuels.

Avec cependant encore une restriction: cette symétrie exigerait un milieu répandu dans l'espace tout entier; dans un cas réel, on ne l'applique évidemment que dans une région limitée (l'intérieur d'un bloc de verre ou de métal): les limites du corps étudié *brisent* la symétrie.

Il existe cependant quelques *formes* qui sauvegardent *une partie* de la symétrie euclidienne. Ce qu'on appelle par exemple "symétrie sphérique", "symétrie de révolution", etc.

Il se trouve que des solides courants permettent de *produire* de telles symétries — par simple usure mutuelle de deux ou plusieurs corps en contact.

— Pour matérialiser les *vissages* qui constituent une symétrie de l'hélice circulaire (fig 5), il suffit de forcer une tige dans un écrou, même approximatif; un premier filetage ainsi obtenu peut s'affiner par la même méthode. Les applications techniques de la vis sont innombrables; comme la vis d'Archimède, toujours utilisée pour l'irrigation. C'est aussi par cette technique qu'on a construit la "machine à diviser", qui a permis les *mesures précises des longueurs*.

— Spinoza, artisan, devait impérativement faire apparaître la *symétrie sphérique* pour polir convenablement les verres de lunettes.



— La symétrie de révolution est obtenue avec le *tour* (du potier ou du tourneur) — ou par la construction de *roues*.

Ces techniques fondamentales sont donc des matérialisations de divers sous-groupes du groupe d'Euclide — sous-groupes aussi, bien entendu, du groupe de Galilée $G$.

En choisissant un sous-groupe de $G$ parmi les translations temporelles, on caractérise un autre type de symétrie que l'on peut appeler *périodique*. C'est cette symétrie que doivent posséder les *horloges*, qu'elles soient normandes ou atomiques: la chronométrie dérive aussi du principe de relativité galiléen.

Enfin un *véhicule* qui respecte le confort de ses passagers doit posséder un certain groupe de symétries galiléennes.

Vous êtes dans un avion par temps calme: rien ne se passe, vous attendez. Attendre cinq minutes, c'est une translation temporelle *dans l'avion*; ça fait partie du groupe de Galilée; ça n'a évidemment pas la même action sur les choses qu'une attente chez vous...

Le "groupe de translations temporelles" n'existe donc pas dans l'absolu, mais seulement dans un véhicule donné — dont il caractérise la *vitesse*.

Tous ces groupes se valent ([14]), aucun véhicule n'a le droit de se prétendre particulièrement au repos — votre maison pas plus qu'un avion ou qu'un bateau. Nous voici revenus au navire pensé par Galilée.

## 10 Einstein et Galilée

Tout le monde a entendu parler d'un autre principe de relativité, celui d'Einstein (1905). On le formule simplement en remplaçant, dans l'analyse précédente, le groupe de Galilée par ce qu'on appelle le *groupe de Poincaré*. Groupe constitué à partir des mêmes éléments: groupe d'Aristote et boosts; mais l'action d'un boost sur l'espace et le temps est subtilement différente ([15]); la structure même des deux groupes n'est pas la même ([16]).

Pour chacune des deux relativités, la cohérence est assurée justement par les règles qui caractérisent un groupe: elles sont faites pour ça. Mais les deux relativités ne sont pas cohérentes entre elles; une au plus peut décrire la nature, il faut choisir. Comment ? C'est un cas où l'expérience seule peut trancher — et pas la sensibilité kantienne.

L'expérience n'est significative que dans des circonstances bien déterminées (mesures extrêmement précises, ou mouvements très rapides comme la propagation de la lumière); mais dans tous ces cas, elle tranche en faveur de la relativité d'Einstein.

---

[14] Techniquement, ils sont *conjugués* dans le groupe de Galilée.

[15] C'est ce qu'on appelle une *transformation de Lorentz*. Elles s'exprime par une formule mystérieuse, pleine de racines carrées, qui fait intervenir la *vitesse de la lumière*. Et pourquoi donc? On pense y lire des effets incroyables: "contraction de l'espace", "retard des horloges". Beaucoup de bons esprits se sont révoltés contre cet arbitraire insupportable qu'un juif allemand prétendait imposer à l'espace et au temps de tout le monde.

D'où provient cette formule de Lorentz? Comment peut-elle participer à une loi de groupe? Nous aurons une explication plus loin (§ 15).

[16] Pour pouvoir parler avec précision de "structure" d'un groupe, il faut accéder au cinquième stade, celui des opérations sur les groupes (voir le diagramme du § 5). Les opérations qui respectent la loi du groupe s'appellent *morphismes*; les propriétés de ces morphismes sont codifiées par la théorie des *catégories* — qui *oublie* la nature des objets du cinquième stade et qui permet souvent de formaliser la notion de "structure".

Cette Relativité a connu sa période de popularité: après la guerre de 1914-1918, elle donnait à la pensée une nouvelle liberté; le paradoxe était désormais non seulement permis, mais encouragé et nécessaire. La sagesse portait les vêtements de la folie.

Deux dates sont significatives: prix Nobel d'Einstein: 1921; Manifeste du Surréalisme (André Breton): 1924.

Le paradoxe majeur de la nouvelle relativité, c'était celui des jumeaux: l'un d'eux reste sur Terre, l'autre fait un voyage en fusée et atteint des vitesses proches de la lumière. Quand ils se retrouvent, ils ont alors des âges différents — très différents même (15 ans et 100 ans par exemple). Paradoxe que ne pouvaient admettre des penseurs tels que Bergson ou Jankelevitch, mais auquel la physique ne fournit aujourd'hui aucune échappatoire.

Or un autre paradoxe était déjà impliqué par la simple relativité de Galilée: les points de l'espace sont éphémères; dire que deux événements se sont succédés en un même lieu relève de la subjectivité, non de la physique.

Pouvez-vous l'admettre ? difficilement, je présume. Nous sommes des animaux terrestres, et particulièrement urbains; nous prenons pour espace absolu et permanent ce qui est matière solide: nos murs, les maisons, les rues.

Que la matière qui nous supporte soit remplacée par l'eau ou l'air et perde un peu de sa solidité, nous sommes saisis de nausée; un séisme, en plus du danger qu'il fait courir, provoque une terreur métaphysique: pendant quelques instants, nous devons affronter la mort de l'espace.

Nous avons tous vu des hommes se mouvoir presque prosaïquement sur la Lune; or l'espace qu'ils empruntaient se meut à cent mille kilomètres à l'heure par rapport au nôtre. Lequel des deux espaces est donc "le vrai", celui auquel nous croyons ?

Nous préférons ne pas répondre — tout en continuant à croire qu'il existe un vrai espace: nos contemporains n'ont pas assimilé la relativité galiléenne — et restent aristotéliciens ([17]).

La difficulté n'est pas neuve: Newton, qui avait reçu la leçon de relativité de Giordano Bruno, Galilée, Gassendi, Descartes, refusait d'abandonner son intuition de l'espace absolu — mais avec mauvaise conscience: *'Il faut avouer qu'il est très difficile de connaître les mouvements vrais de chaque corps, & de les distinguer des mouvements apparents'* .

### 11 Vous avez dit "énergie" ?

Ambigu, le mot *énergie*. Son sens usuel et celui de ses proches (*énergique*, *énergumène*, etc.) met en oeuvre des pulsions assez fortes. Son utilisation en économie aussi, d'un autre type ("Agence pour la maitrise de l'énergie").

L'usage public et médiatique du mot énergie profite de cette ambiguïté: des connotations affectives qui sont censé justifiées par une valeur "scientifique" irréfutable.

Quelle valeur scientifique? Qu'a-t-elle à voir avec l'Energie des économistes?

L'énergie du physicien est une notion subtile qui semble remonter à Huygens ([18]). Sa propriété fondamentale, c'est de *se conserver à travers toutes les transformations;* l'énergie peut tout

---

[17] Au sens technique du terme: l'espace absolu intemporel n'existe que dans la relativité aristotélicienne (voir le § 6).

[18] C'est très probablement en l'honneur de Huygens que cette grandeur est désignée par la lettre $H$ dans la Mécanique Analytique de Lagrange. Ceux qui pensent que $H$ évoque Sir William Rowan Hamilton doivent noter que ce dernier était âgé de huit ans à la mort de Lagrange (1813).



au plus s'enfuir ailleurs ou se dégrader, mais son bilan global reste rigoureusement équilibré. Rien ne se perd, rien ne se crée, dit-on doctement.

Propriété qui n'a de sens que si elle est *universelle:* toute forme de matière qui échapperait au bilan ruinerait le principe.

Existe-t-il un support géométrique à la notion d'énergie et au principe de sa conservation?

Considérons un *objet physique quelconque* (par exemple un atome ou le système solaire), suffisamment isolé pour qu'on puisse l'étudier comme s'il était seul.

Soumis aux "lois de la physique", cet objet va évoluer de son mouvement propre. Il faut donc distinguer entre l'*apparence* de cet objet (le spectacle de son mouvement) et sa *permanence* (son identité d'atome par exemple). La définition la plus prudente de cette permanence, c'est évidemment *l'ensemble $X$ de tous ses mouvements possibles.*

Parler du "possible" évoque le principe de relativité: principe qui implique ici que *le groupe de Galilée est un groupe de symétrie de cet espace des mouvements $X$* .

Or l'analyse des principes de la mécanique permet, dans les cas classiques, de munir $X$ d'une nouvelle géométrie, dite *symplectique* ([19]).

Notons $Sympl(X)$ le groupe correspondant *(groupe symplectique)*. Il est suffisamment grand pour *engendrer* $X$ : un seul mouvement $a$ étant choisi arbitrairement, tout autre mouvement $x$ est donné par l'équation:

$$x = s(a),$$

$s$ étant pris dans $Sympl(X)$.

Le principe de relativité suggère que le groupe de Galilée en est un *sous-groupe*. Ce simple fait a des conséquences mathématiques intéressantes: à chaque mouvement $x$ est associé un objet géométrique, appelé *moment galiléen*, qui possède dix dimensions (juste comme le groupe de Galilée lui-même). L'analyse de cet objet nouveau le décompose en diverses "grandeurs physiques" dont voici la liste ([20]):

*énergie*
*impulsion*
*moment cinétique*
*centre de gravité*

Ça y est, voilà l'énergie incorporée à un objet géométrique.

Ce *moment* est effectivement muni de la géométrie galiléenne, comme l'espace $X$ des *mouvements*. Mais une circonstance curieuse se produit: un *décalage* entre les deux actions du groupe de Galilée (sur le mouvement et sur le moment). Ce décalage peut se mesurer par un nombre ([21]). Cette mesure, c'est la

*masse*

---

[19] L'objet constitutif de cette géométrie est un tenseur sur $X$ (voir le §1); il est bâti à partir des *conditions initiales* choisies pour déterminer un mouvement: date, positions, vitesses; *mais il ne dépend pas de ce choix* (Lagrange, 1811).

[20] Elles sont corrélatives respectivement des translations temporelles, translations spatiales, rotations et boosts.

[21] Techniquement, ce nombre repère une *classe de cohomologie*.

qui acquiert ainsi un statut géométrique, d'un type nouveau.

On peut exprimer simplement le moment au moyen des conditions initiales: lorsque le système évolue, les conditions initiales changent, mais le moment reste *constant*. Nécessairement, puisque le moment ne dépend que du mouvement $x$ adopté par le système. *La conservation de l'énergie* est donc associée à la *conservation de l'impulsion*, etc.

L'étude détaillée de ces conservations implique quelques "principes": égalité de l'action et de la réaction, principe d'inertie de Galilée, qui eux aussi viennent prendre place dans la géométrie du moment.

Lorsque plusieurs objets sont en présence, les moments s'ajoutent: l'énergie du système composé est la somme des énergies des systèmes composants, la masse la somme des masses, etc. C'est à cause ce cette *additivité* que l'on peut *mesurer* ces grandeurs — parce que la part du moment qui est perdue par l'objet est nécessairement récupérée par l'instrument de mesure [22]. On a souvent tenté de réduire la physique à ces *"lois de conservation"*.

Le passage à la relativité d'Einstein est facile (mode d'emploi: remplacer le groupe de Galilée par le groupe de Poincaré en gardant la géométrie symplectique): parmi les règles qui permettent de passer du moment de Galilée au moment d'Einstein-Poincaré, l'une est très connue: c'est la relation

$$E = mc^2$$

qui relie *l'énergie einsteinienne* $E$ et la *masse galiléenne* $m$ ($c$ désignant la vitesse de la lumière) et dont chacun connait les vérifications et les implications.

Puisque la géométrie symplectique implique des lois de conservation qui sont universelles, on peut, par induction, conjecturer un rôle universel de la géométrie symplectique en physique.

Du *matérialisme* — la théorie *idéale* de la matière — nous savons encore peu de choses, mais probablement qu'il devrait être *symplectique*.

Profitons donc de cette universalité supposée pour chercher a priori les objets *symplectiques* $X$ qui peuvent être *engendrés par le groupe de Galilée* $G$ (voir ci-dessus comment un groupe engendre un ensemble).

Puisque $G$ est connu, la classification de ces objets est un simple problème mathématique. On découvre ainsi des objets ponctuels, tantôt identiques aux "points matériels" de la mécanique newtonienne, tantôt munis d'une qualité supplémentaire, le "moment cinétique propre" (on dit aussi "spin").

*Ça marche:* un électron ou un proton est bien une particule douée de spin, du modèle produit par le groupe de Galilée[23]. Le matérialisme symplectique est apte à décrire autre chose que les "systèmes de points matériels" de la mécanique classique.

Ça marche aussi en relativité d'Einstein.

La géométrie correspondante prévoit par exemple *deux espèces* de particules à spin de masse nulle — images miroir l'une de l'autre. Or ces deux espèces décrivent correctement les *photons* (particules de lumière), qui peuvent être "polarisés à droite" ou "polarisés à gauche" comme de vulgaires tire-bouchons: la lumière aussi participe du matérialisme symplectique.

Qu'il classe les cristaux ou les particules, le théoricien est comme un bottier possédant des chaussures de toutes les pointures, et qui attend les clients. Sa collection est riche, probablement toutes

---

22 C'est ainsi que l'on mesurait la vitesse d'une balle de fusil, avant la cinématographie, en transférant son impulsion à un pot rempli de terre mobile sur un axe.

23 Le spin a d'abord été découvert expérimentalement, et est apparu comme un phénomène mystérieux. L'interprétation géométrique est ultérieure.



ne serviront pas — mais il est capable de chausser tous ceux qui se présentent — lorsque ses modèles sont universels.

A côté des "particules élémentaires" (dont le groupe de Galilée $G$ est générateur), il existe certains objets qui possèdent un générateur simple, intermédiaire entre $G$ et *Sympl(X)* : c'est le cas par exemple de l'atome d'hydrogène [24]. Une telle "symétrie accidentelle", mathématique, a diverses conséquences physiques — comme la périodicité des mouvements et la "dégénérescence des niveaux d'énergie".

C'est à cause de cette dégénérescence que l'atome d'hydrogène et les atomes qui lui ressemblent sont capables de transitions faciles; c'est la facilité de ces transitions qui permet la chimie douce, dite "organique", utilisée par la vie terrestre.

### 12 Les dés, la température et le zodiaque

En y regardant de plus près, les règles d'application des modèles symplectiques ont besoin d'être remodelées.

A l'échelle microscopique, l'expérience fait apparaître que la réalité ne choisit pas parmi les virtualités offertes par la théorie: un état réel semble *réparti* dans l'ensemble $X$ des mouvements possibles (ensemble que nous venons d'étudier).

Réparti *comment ?* A première vue, selon les règles du *calcul des probabilités*.

Ce calcul a été élaboré au XVII$^{ème}$ siècle pour l'édification des joueurs [25]. Est-il apte à décrire le rôle du *hasard* dans la nature ? "Az-zahr" signifie "dé" en arabe; est-il admissible que Dieu joue aux dés, se demandait Einstein ?

De fait, une telle description du réel, appelée "mécanique statistique", marche bien pour décrire l'état final d'un système qui a évolué pendant longtemps et qui a épuisé sa faculté d'irréversibilité. Faculté qu'on appelle *neg-entropie*, et qui ne peut que se perdre au fil du temps [26].

Dans le cas d'un système isolé quelconque, la considération simultanée de la neg-entropie et du *moment galiléen* — qui, lui, ne bouge pas — montre que les états d'équilibre possibles sont décrits par un *objet géométrique nouveau* , $\theta$ , qui associe intimement une *température* et un *mouvement de rotation*.

La notion de *température* acquiert ainsi un statut géométrique: c'est la "composante temporelle" de l'objet $\theta$ [27].

Sous des hypothèses assez générales, ceci implique l'existence d'une *température critique* au dessus de laquelle tout équilibre est interdit — avec ou sans rotation. Une propriété universelle dont l'origine est dans la structure du groupe de Galilée, et qui n'a aucun équivalent en mécanique statistique classique.

---

24 Dans un modèle simplifié (voir le paragraphe 13).

25 Christiaan Huygens, *De ratiociniis in ludo aleæ* , 1657.

26 Le mot *entropie* a été créé par Clausius en 1855 pour désigner un facteur d'irréversibilité. Malheureusement l'entropie croit dans les processus irréversibles; pour obtenir une grandeur qui disparait en même temps que les possibilités d'évolution, il faut changer son signe: d'où le terme barbare de *neg-entropie*.

27 Plus précisément, la composante temporelle de $\theta$ est l'inverse de la température absolue.

La composante spatiale de $\theta$ détermine un *pôle* et un *sens de rotation* autour de ce pôle; associé avec la composante spatiale, il définit enfin une *période de rotation*.

Le mouvement ainsi décrit est nécessairement adopté par tout système isolé ayant épuisé sa neg-entropie: *voilà pourquoi la Terre tourne — comme tournent sur eux-mêmes la Lune, le Soleil et les étoiles*.

Lorsque plusieurs systèmes coexistent, leurs actions mutuelles, usant progressivement la neg-entropie, les amèneront finalement à se comporter comme un seul système, donc à adopter une seule valeur de la *température vectorielle* $\theta$ ; non seulement les températures ordinaires tendent à prendre la même valeur, mais aussi les mouvements de rotation — par adoption d'un pôle et d'une vitesse angulaire communs.

Ces deux principes sont utilisés pour la *cuisine* (chauffage des aliments par conduction) et la *lessive* (essorage du linge dans le tambour d'une machine à laver).

Autre exemple: dans le système *Terre-Lune*, la neg-entropie s'est dépensée essentiellement par la production des marées. Les marées subies par la Lune ont déjà ajusté sa rotation à la rotation d'ensemble du système (qui dure un mois); c'est pourquoi elle nous présente toujours la même face.

Inexorablement, les marées océaniques et terrestres auront le même effet sur la Terre: dans un futur très lointain, la lune restera fixe dans le ciel, le jour sera aussi long que le mois actuel.

Le système Terre-Lune n'est qu'une partie du *Système Solaire*. L'évolution de celui-ci ne sera jamais complète, mais elle a déjà pratiquement égalisé les *composantes spatiales* de $\theta$ .

Voilà pourquoi toutes les rotations se font pratiquement dans le même sens autour du même pôle. Pourquoi nous voyons les sept astres errants — Soleil, Lune et planètes — parcourir le même chemin devant le firmament des étoiles; c'est ce chemin qu'on appelle l'*écliptique*, et que l'on a peuplé d'animaux au bénéfice des astrologues (en grec: *zodiaque* = domaine des bêtes).

De même pour les vitesses de rotation individuelles, du Soleil comme des planètes. Le pôle terrestre n'est pas exactement aligné sur le pôle commun (c'est pourquoi il existe des *saisons*) mais il tourne très lentement autour (c'est la *précession des équinoxes*, encore une découverte d'Hipparque).

Les *galaxies spirales* — systèmes comprenant dix milliards d'étoiles environ — ont aussi adopté un régime de rotation; en particulier leur région centrale est animée d'un mouvement quasi-solide.

Cette rotation d'ensemble est forcément très lente puisque toute la galaxie y participe peu ou prou; ce qui compromet l'équilibre au centre: le coeur d'une galaxie peut s'effondrer, produisant en retour une explosion spectaculaire: c'est ainsi qu'ont dû apparaître les objets les plus brillants de l'univers, les *quasars* .

## 13 Microcosmos

Occupons-nous maintenant d'objets très petits — les atomes.

L'expérience a montré qu'ils s'éloignent du comportement prévu par la mécanique classique; si le recours à la mécanique statistique améliore un peu leur description, cette modélisation reste insuffisante.

Tout au long du $XX^{ème}$ siècle, des tentatives ont été faites pour adapter les modèles à cette réalité; à commencer par "l'atome de Bohr" de 1913.

Cette quête dure encore: ce qu'on a appelé *mécanique quantique* dans les années 20 n'a pas encore atteint une forme satisfaisante.



La *quantification géométrique* est un programme visant à constituer une description géométrique des objets qui reste valable à petite échelle — et donne une interprétation cohérente aux "effets quantiques" que l'expérience met en évidence.

Une voie pour y parvenir consiste à considérer, non seulement un objet $X$ et un groupe de symétries symplectiques $S$, mais aussi un nouveau groupe $\Sigma$, "extension" de $S$ [28] et générateur de $X$.

Les *états* de l'objet matériel ne seront plus des points de $X$ (comme dans la mécanique classique), ni des lois de probabilité sur $X$ (comme dans la mécanique statistique), mais des fonctions sur $\Sigma$ — vérifiant des "principes" mathématiques trop techniques pour être expliqués ici. Disons simplement qu'ils mettent en oeuvre ce qu'on appelle l'*analyse harmonique non commutative* — héritière du calcul d'Hipparque et Ptolémée.

Il résulte de ces principes un nouveau type de calcul de probabilités sur l'ensemble $X$; ces probabilités ne sont pas celles des joueurs de dés; elles ont des aspects très paradoxaux, mais ce sont justement ceux qu'on constate expérimentalement.

Le principe de relativité s'applique toujours: le groupe de Galilée est un sous-groupe de $S$ ; les grandeurs classiques corrélatives: énergie, impulsion, et autres composantes du *moment* sont munies, dans chaque état de l'objet, d'un *spectre* (quelque chose qu'on observe au spectroscope, et qui s'exprime par une loi de probabilité).

Voici le genre de paradoxes qui découle de l'architecture des "probabilités quantiques":

— Bien que les grandeurs classiques soient continues, leur spectre peut ne jamais contenir que des valeurs discrètes, "quantifiées" [29] ; ce fait a été le premier signal d'alarme pour les théoriciens. Les spectres de diverses grandeurs peuvent être "incompatibles": ainsi un point sur une sphère [30] que deux observateurs différents *ne peuvent jamais voir à la même place*.

—Deuxième paradoxe, en sens inverse: le comble de la discrétion, ce serait un état où le spectre de chaque grandeur se réduirait à une seule valeur (comme dans un mouvement classique); or ce n'est jamais possible, et cette impossibilité peut s'exprimer quantitativement (*inégalités d'incertitude de Heisenberg*).

Paradoxe n'est pas contradiction, mais remise en cause d'un paradigme antérieur: probabilités ou certitudes classiques sont inadaptées à la modélisation de la situation réelle.

Quant au nouveau modèle, il colle bien à la réalité et sa cohérence est garantie par la théorie des groupes. Que demander de plus?

Malheureusement, si ce modèle fonctionne bien dans le cas des particules élémentaires et dans quelques autres, il soulève de grandes difficultés mathématiques dès qu'on s'attaque à des systèmes complexes. On est alors réduit au livre de recettes qu'on appelle "mécanique quantique"; livre éprouvé, dont les résultats sont excellents [31], mais dont la cohérence n'offre aucune garantie.

L'atome d'hydrogène, "simple" système à deux corps (un proton et un électron), est un exemple instructif. Pour coller avec précision à la réalité expérimentale, il faut connaître tous les tours de main: un peu de mécanique quantique relativiste (pour obtenir la "structure fine" du mouvement de l'électron), un peu de mécanique galiléenne (pour tenir compte du recul du proton);

---

28 Techniquement: $S = \Sigma / Centre(\Sigma)$. C'est dans le passage de $\Sigma$ à $S$ qu'intervient la *constante de Planck*.

29 "Spectre de raies". C'est le cas pour la mesure du spin dans l'expérience de Stern et Gerlach (1921).

30 La direction du spin.

31 Son domaine d'application exemplaire, c'est la *chimie théorique*.

un peu de théorie des champs pour "l'effet Lamb". Pour expliquer la "structure hyperfine" ([32]), il faut diviser par 2 le terme théorique (on invoque une certaine "précession de Thomas" qui serait responsable; mais où et comment aurait-elle lieu, et pourquoi donnerait-elle juste ce diviseur 2 ?). Etc.

On est donc encore loin de connaître un modèle cohérent de l'objet le plus répandu dans l'univers.

### 14 Macrocosmos

La Terre tourne; le système solaire tourne; le système des étoiles que nous pouvons voir, la Galaxie, tourne aussi.

Si nous regardons de plus en plus loin, allons nous encore découvrir des systèmes tournants et aplatis, de plus en plus grands?

La réponse est *non:* les télescopes nous montrent des millions de galaxies analogues à la nôtre, plus ou moins groupées en amas; mais au delà d'une certaine distance ([33]), toutes les régions de la sphère céleste se valent pour la richesse en galaxies ([34]).

Des régions qui "se valent" sur une sphère, c'est ce qu'on appelle une *symétrie sphérique;* le groupe correspondant, c'est le *groupe R des rotations* autour du centre; c'est ce que rappelle le mot utilisé pour désigner ce type de symétrie: *isotropie* (= "pareil tourner").

Comment pouvons-nous interpréter ce groupe $R$ ?

Nous sommes en face d'une alternative: il faut choisir entre l'hypothèse aristotélicienne "la Terre joue un rôle central et privilégié dans l'univers" et l'hypothèse contraire, plus modeste, qu'on appelle parfois "principe cosmologique".

Cette alternative prend une signification plus précise quand on la formule en langage de groupes:

— ou bien le groupe $R$ est la seule symétrie du Cosmos — et dans ce cas la Terre est le seul point fixe de ces symétries;

— ou bien il existe un groupe $G$ plus grand, qui ne laisse plus la Terre fixe; et $R$ est simplement le "stabilisateur" de la Terre dans $G$ — sélectionné par nos modestes possibilités d'observation ([35]).

Dans ce cas, quel peut être ce groupe $G$ ?

Quelques hypothèses qualitatives donnent à cette question une formulation purement mathématique. Les mathématiques fournissent alors la réponse: il y a essentiellement *trois* groupes $G$ possibles; dans ces trois cas, $G$ *engendre l'espace*, ainsi muni d'une *géométrie*.

---

32 Effet de l'action mutuelle des deux spins. Elle est responsable de la raie spectrale à 21 cm utilisée systématiquement pour observer l'hydrogène au radio-télescope.

33 Cent millions d'années-lumière environ. Les divers systèmes tournants qu'on observe à plus petite échelle sont la marque d'une longue évolution, comme nous l'avons remarqué au §12. Dans ses plus grandes structures, *l'univers est encore jeune.*

34 Le même phénomène se produit pour le rayonnement qu'on observe au fond du ciel: il est très précisément le même dans toutes les directions.

35 Pour la définition du stabilisateur, voir la note 9.

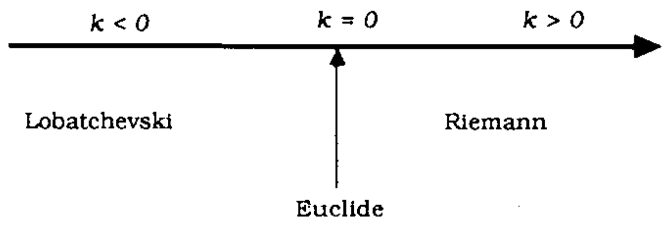


Trois types possibles donc pour la géométrie de l'espace, l'une étant la géométrie euclidienne; les deux autres sont connues depuis plus d'un siècle; "géométrie de Lobatchevski" (1826), "géométrie de Riemann-Klein" (1871).

Bien entendu ces trois géométries sont incompatibles, une seule peut être "la vraie". Laquelle?

Notre expérience de l'espace, des vérifications très précises (en particulier celles de la mécanique céleste), nous crient que ce ne peut être que la géométrie euclidienne.

Mais il existe un argument adverse, très prégnant: c'est que les géométries éventuelles de l'espace sont repérées par une quantité $k$, appelé *courbure*, et qui *varie de façon continue;* le type de géométrie étant donné par le diagramme suivant:




La géométrie euclidienne joue un rôle de transition, les trois géométries sont *indiscernables* si $k$ est suffisamment proche de zéro.

Plus précisément, si $k$ n'est pas nul, il existe une *longueur* caractéristique de la géométrie, une *échelle de l'univers;* elle est d'autant plus grande que $k$ est petit — et infinie dans le cas euclidien. Toutes les observations qui militent en faveur de la géométrie euclidienne, si elles ont été effectuées dans une région de diamètre $D$, nous apprennent une seule chose: c'est que l'échelle de l'univers est nettement plus grande que $D$.

Affirmer que la géométrie *doit* être euclidienne, c'est croire a priori que l'univers est trop grand pour que nous puissions l'évaluer.

Il est quand même permis d'essayer; comment? évidemment en observant les objets les plus lointains — les galaxies et les quasars — et en les prenant pour jalons.

Le présent *problème cosmologique* est très différent de ceux que nous avons examinés jusqu'ici; il s'agissait auparavant de *symétries exactes du possible;* ici de *symétries approchées du réel.* Nous faisons de la cosmographie, pas de le physique.

Bien entendu nous ne pouvons pas nous débarrasser de la physique; si l'espace est courbe, l'intendance doit suivre. Or jusqu'à présent la physique que nous avons examinée postulait, a priori, une courbure nulle.

La courbure $k$ de l'espace serait-elle inscrite dans la physique? serait-ce une constante universelle, comme la vitesse de la lumière ou la masse de l'électron?

Einstein a proposé en 1918 un autre type de modèle, radicalement différent: on l'appelle *Relativité générale.* Par opposition, la première relativité d'Einstein, fondée sur le groupe de Poincaré, devient la *Relativité restreinte* ([36]).

---

36 "Special Relativity".

Le groupe $D$ qui définit cette relativité générale est maintenant constitué des transformations de l'espace-temps qui sont *différentiables dans les deux sens* (37). La géométrie correspondante s'appelle *géométrie différentielle*.

Ce groupe est immense (sa dimension est infinie). Il contient par exemple toutes les dilatations que l'on voudra de l'espace ou du temps.

Mais dans ce cas, quel sens peut avoir la mesure des durées — puisque nous avons le droit de ratatiner le temps à notre convenance?

La réponse, c'est l'existence d'un *objet géométrique nouveau*, que l'on note $g$ ; il s'agit d'un tenseur(38); on l'appelle tenseur *métrique* parce qu'il permet des mesures effectives, notamment les mesures de durées (39).

Le résultat de cette mesure *ne change pas* sous l'action du groupe $D$ — grâce au fait que $D$ agit *à la fois* sur $g$ et sur l'espace-temps, et que la mesure des durées dépend des deux; une compensation se produit (40).

Ce tenseur a une autre propriété remarquable; il définit dans l'espace-temps deux familles particulières de courbes, appelées *géodésiques temporelles*, *géodésiques isotropes*.

Les courbes de l'espace-temps, nos habitudes spatiales nous les font percevoir comme des "points en mouvement". De quels mouvements s'agit-il?

— Les *géodésiques temporelles*, ce sont les mouvements des étoiles, du Soleil, des planètes, de la pomme de Newton, et plus généralement de tous les astres et toutes les poussières qui peuvent peupler l'espace. La chute libre des corps, sous l'effet de la pesanteur, est donc *inscrite dans l'objet* $g$ ; $g$ comme *gravitation* (41).

— Les *géodésiques isotropes*, ce sont les "mouvements des photons" - la propagation de la lumière; l'*optique* aussi est inscrite dans $g$ (42).

La découverte la plus célèbre de Newton, c'est que la pesanteur est créée par la matière, selon la "loi de la gravitation universelle". Que devient ici cette loi? Einstein en a donné une transcription relativiste satisfaisante; on l'appelle *équation d'Einstein*.

— Relativiste, parce que cette condition est invariante par l'action du groupe $D$ (43).

— Satisfaisante, parce que l'équation d'Einstein implique tous les effets classiques de la pesanteur, en particulier la mécanique céleste; avec cependant diverses corrections, que l'observation a confirmées; si bien que les prédictions de ce modèle sont *les plus précises qu'on ait jamais obtenues*.

37 Une fonction de plusieurs variables est dite *différentiable* si elle admet des dérivées partielles de tous les ordres. Il existe une technique qui permet de transférer cette propriété des fonctions numériques à des espaces divers — comme l'espace-temps. Les transformations différentiables dans les deux sens s'appellent *difféomorphismes*; ils constituent effectivement un groupe.

38 Comme ceux que nous avions rencontrés dans les modèles de milieu continu; voir la note 2.

39 Selon une procédure imaginée primitivement par Riemann en 1854.

40 Quand un difféomorphisme rapproche les points de l'espace, il augmente convenablement la valeur de $g$. Cet effet s'appelle *covariance-contravariance*.

41 En latin, *gravis* = lourd.

Cette interprétation relativiste implique que les lois de la gravitation soient les mêmes, quel que soit le corps concerné; ce fait, qu'on appelle "principe de l'équivalence", est confirmé par l'expérience. Depuis longtemps: Galilée et Newton l'ont déjà expérimenté.

42 La *vitesse de la lumière* est inscrite dans $g$ : ce n'est donc plus une constante de la physique. Actuellement d'ailleurs on lui attribue une valeur conventionnelle; c'est un simple rapport d'unités de mesure.

43 Qui agit à la fois sur le tenseur métrique $g$ (objet géométrique) et sur la matière (principe de relativité) .



Corrections nécessairement aussi pour l'optique; la lumière est sensible à la pesanteur, elle doit être déviée par les masses importantes. Récemment cet effet a été vérifié spectaculairement par l'observation de *mirages gravitationnels*.

Mais il ne faut pas oublier que la relativité générale est un modèle à vocation universelle — et pas seulement une théorie de la gravitation. Pour ne citer qu'un seul exemple: elle permet d'expliquer le "premier principe" de la thermodynamique, sous sa forme opératoire précise (44).

La question qui se pose au sujet de tout modèle nouveau, c'est sa compatibilité avec les modèles précédents; comment confronter relativité générale et relativité restreinte ? Cela peut se faire en deux stades:

— Premier stade: on constate que la relativité restreinte peut s'insérer dans la relativité générale. Il suffit de choisir, parmi tous les tenseurs métriques $g$ , *celui dont la symétrie est la plus grande*: le groupe de symétrie correspondant, c'est justement le groupe de Poincaré $P$. On peut dans ce cas oublier le tenseur $g$ en limitant à $P$ le groupe de relativité; ce qui est bien le principe de relativité restreinte.

$P$ est ainsi *défini* par voie géométrique — au lieu d'être *arbitrairement choisi* comme dans le premier stade de la Relativité restreinte. La transformation de Lorentz a perdu son révoltant mystère (45).

La gravitation et l'optique impliquées par ce tenseur particulier sont simples; *impesanteur* d'une part; *propagation rectiligne* de la lumière, à vitesse constante, d'autre part. La relativité restreinte, par construction , est donc incapable de décrire la pesanteur ou les mirages.

— Deuxième stade: Comment la relativité générale — qui prend en charge la pesanteur — peut-elle être *approchée* par la relativité restreinte?

Approximation "microscopique": il suffit de se restreindre à une *petite région* de l'univers. La validité pratique de cette approximation, nous la constatons par le fait qu'on peut pratiquement *créer l'impesanteur* partout, dans un avion en vol comme dans un vaisseau spatial.

Si cette approximation est valable dans une région pas si microscopique que ça (quelques minutes dans un vaisseau spatial en orbite autour de la Terre), c'est parce que la constante d'attraction universelle $G$ de Newton, qui figure dans l'équation d'Einstein (46), est très petite à notre échelle.

Réciproquement, si on veut construire un modèle de l'univers à grande échelle, il va falloir renoncer à l'approximation microscopique de la relativité restreinte.

Parmi les innombrables solutions de l'équation d'Einstein en présence de matière, nous allons encore une fois chercher celles dont la *symétrie* est la plus grande; un certain groupe $G$

44 Les phénomènes dissipatifs, qui modifient les spectres des composantes du moment, respectent cependant les *valeurs moyennes* de ces spectres. C'est ce principe qui permet de définir et de calculer les équilibres thermodynamiques — notamment la température vectorielle $\theta$ . Voir le § 12.

45 voir la note 15

46 Ainsi qu'une autre constante $\Lambda$, dite "cosmologique". La géométrie montre que $\Lambda$ et $G$ sont les deux seules constantes qui puissent intervenir à l'échelle macroscopique. Elles figurent explicitement dans le modèle initial de Friedmann; mais l'usage s'est répandu d'appeler *"Friedmann-Lemaitre"* ce modèle.

apparait ainsi, "moindre" que le groupe de Poincaré [47]; ces solutions, ce sont les *modèles de Friedmann* (1922).

Ils ont une propriété remarquable: leur seule symétrie *découpe* l'univers $X$ en espace et temps séparés (fig 6).

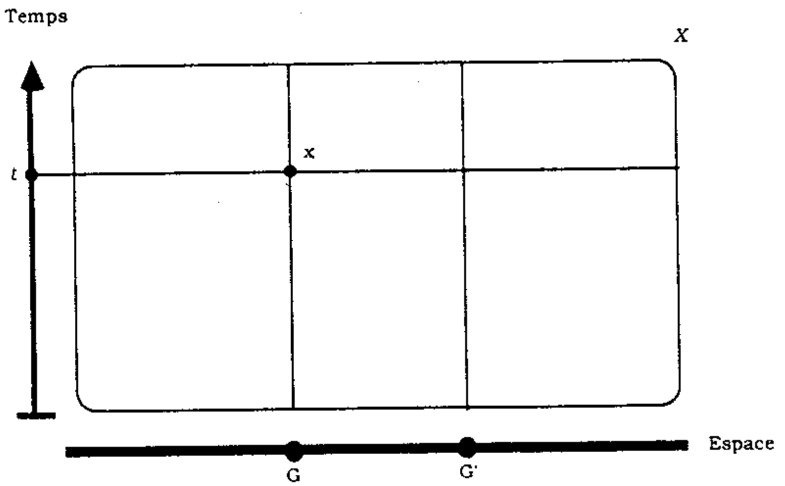



fig 6

Chaque point $x$ de $X$ peut se repérer par une "date" t et une "position" G [48]; les dates parcourent le "temps cosmique", les positions "l'espace comobile", tridimensionnel.

Les courbes G = Cte sont des *géodésiques*, décrivant comment *gravitent* les diverses masses constituant l'univers . On peut se représenter les points G , G' comme des "galaxies" qui vont évoluer au cours du temps, en restant "attachées à l'espace"; d'où l'expression *espace comobile* [49].

Le tenseur métrique permet de déterminer, *à chaque date* $t$ , la distance de deux points G, G'; le modèle montre que cette distance varie proportionnellement à un facteur $R(t)$ : $R$ est une fonction déterminée du temps $t$ , soit croissante, soit décroissante.

Si $R$ croît avec $t$ , toutes les distances mutuelles vont augmenter au même taux: c'est une description parfaite de l'*expansion de l'univers*, telle qu'elle a été découverte par les observations de Hubble (1928).

Le cas décroissant indiquerait un *effondrement de l'univers;* les univers de Friedmann sont toujours *instables* [50].

---

47 La dimension de ce groupe $G$ est 6 - contre 10 pour le groupe de Poincaré. Nous avons éliminé ici les modèles particuliers du type Einstein-de Sitter, qui supposent une compensation exacte entre la densité de matière et les constantes $\Lambda$ , $G$ .

48 La *position* de x peut se définir simplement comme la *symétrie* de x dans le groupe $G$, et sa *date* comme *l'orbite* de x dans $G$ (l'ensemble des images de x par les éléments de $G$).

49 Bien entendu, il existe d'autres géodésiques, sur lesquelles peuvent graviter certains objets; le modèle implique simplement que ces objets sont *rares*, ou qu'ils se déplacent *lentement* dans l'espace comobile. C'est ce que vérifie l'observation.

50 La situation est la même dans le modèle newtonien - qui prédit *exactement* le même taux d'expansion $R(t)$ que le modèle de Friedmann. Il n'y a pas de "correction relativiste" dans ce cas.

Le problème de l'instabilité n'avait pas échappé à Newton, qui n'avait pensé cependant qu'à un effondrement: "*on voit que celui qui a arrangé cet univers, a mis les étoiles fixes à une distance immense les unes des*



Par ailleurs le groupe G agit sur l'espace comobile , et le munit de l'une des trois géométries d'Euclide, de Lobatchevski ou de Riemann-Klein — chacune des trois possibilités étant permise.

La symétrie du modèle implique évidemment l'équipartition de la matière dans l'espace. Il ne peut s'agir que d'une approximation macroscopique, puisque la matière est condensée en amas, galaxies, étoiles, planètes. Heureusement d'ailleurs, sans quoi nous n'existerions pas [51].

Approximation qui a quelque chose de commun avec celle qui nous permet de considérer un liquide ou un verre comme homogène et isotrope: les atomes dans le verre jouant le rôle des galaxies dans l'espace.

Les aspects de l'univers que nous montre l'observation lointaine sont donc parfaitement décrits par un modèle de Friedmann: symétrie de la répartition des galaxies dans le ciel, fuite de ces galaxies.

L'intendance a suivi, la physique n'interdit plus à l'espace d'être courbe. Est-il courbe effectivement? question controversée, mais il y a quelques arguments sérieux en faveur d'une courbure *positive*. Ceci aurait une conséquence essentielle: l'univers aurait alors un volume fini [52], une masse finie: il serait composé d'environ

100.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000

atomes "seulement" ($10^{80}$, avec une écriture plus maniable).

Dans un tel modèle, la thermodynamique relie très directement la température à l'échelle de l'espace; dans le cas de l'expansion, *l'univers se refroidit* [53].

Selon le principe de La Palisse, auparavant, il faisait donc plus chaud. Beaucoup plus chaud même: quinze milliards de degrés il y a quinze milliards d'années. Avec quelques conséquences: il existait un rayonnement thermique intense que nous apercevons encore au fond du ciel — heureusement refroidi par l'expansion [54]; il régnait une énorme pression de radiation, qui a peut-être suffi comme moteur de l'expansion. Et surtout diverses sortes de matière et d'antimatière sont apparues spontanément, sous la seule action de cette température — qui ont évolué au cours des âges vers tout ce que nous connaissons.

Et quelques minutes avant? On atteint la limite du modèle, qui indique alors une échelle nulle et une température infinie; on appelle ça le *big-bang* .

---

*autres, de peur que ces globes ne tombassent les uns sur les autres par la force de leur gravité* ". Rien n'aurait empêché le Dieu de Newton, pour obtenir le même résultat, de simplement lancer les étoiles dans un vaste mouvement d'expansion.

51 C'est cette remarque — que nous existons — qu'on appelle parfois le "principe anthropique". On pourrait aussi formuler un "principe stellaire", un "principe caillouteux", un "principe asinien", puisqu'il existe des étoiles, des cailloux, des ânes.

La modestie du principe cosmologique est un outil puissant — mais pas l'immodestie anthropique...

52 C'est ce qu'on appelle un modèle "fermé" (voir la note 55).

La représentation mentale d'un tel univers est difficile — conditionnés que nous sommes au modèle euclidien. Un univers fini, nous n'arrivons guère à nous l'imaginer que comme l'intérieur d'une sphère. Mais la symétrie même implique que *tous* les points se valent comme "centre de l'univers": le centre est partout, comme écrivait Pascal. Pas de "bord de l'univers" à découvrir, donc.

53 Au cours de l'expansion, la température absolue est inversement proportionnelle à l'échelle $R(t)$ de l'espace; sa valeur actuelle est de 3 degrés Kelvin (-270° centigrades).

54 On l'appelle *rayonnement cosmologique (Background cosmological radiation).* C'est lui qui permet de mesurer la température de 3° K qui règne dans l'univers aujourd'hui.

Le temps doit donc être limité du côté du passé: ces modèles de Friedmann sont incompatibles avec l'existence d'objets arbitrairement vieux.

Or nous saurions parfaitement reconnaître un objet qui aurait par exemple 50 milliards d'années: une pierre, un amas d'étoiles ou une galaxie. C'est un fait qu'*on n'en a jamais rencontré*.

Par contre *on rencontre* des corps — comme le lithium qui fait marcher les montres à quartz — qui semblent bien s'être produits, spontanément, dans la fournaise des premiers instants de l'univers ([55]).

L'allure de l'univers "à l'époque du big-bang" est très différente selon le signe de la courbure $k$.

— Si $k$ est $\leq 0$, l'univers est illimité même à la date du big-bang; seul le tenseur métrique a dégénéré. Un grave problème se pose alors: il est nécessaire, dans ce type de modèle, de *postuler a priori la symétrie*. La symétrie actuelle existe parce qu'elle a toujours existé, aurait proclamé Diafoirus. En fait la symétrie que nous observons, n'ayant pas de cause génétique, pourrait être un simple phénomène local et révocable à tout instant. Aucune loi de la nature n'empêche qu'arrive un jour du fond du ciel une onde lumineuse ou gravitationnelle balayant tout sur son passage. Fin du spectacle.

— Au contraire, si $k$ est positive, l'univers initial doit avoir été quasi-ponctuel, et la symétrie que nous observons pourrait être un phénomène acquis, produit par un mécanisme lié à l'expansion ([56]). Mécanisme qu'on ne peut évidemment pas décrire au moyen d'un modèle de Friedmann — qui suppose la symétrie déjà acquise à tout instant. Mais rassurant: l'univers peut durer, indéfiniment ([57]).

---

55 Contrairement à d'autres éléments plus lourds, le lithium n'est pas fabriqué par les étoiles, mais au contraire détruit.

56 De même, l'explosion d'une bombe atomique dans le vide produit en quelques microsecondes une boule de feu à symétrie sphérique — indépendamment, bien entendu, de la forme initiale de la bombe.

57 On a souvent affirmé, au contraire, que l'espace fermé était destiné à s'effondrer sur lui-même; ceci résultant d'un calcul où la constante cosmologique $\Lambda$ est supposée nulle a priori. Ce dogmatisme n'a pas de support géométrique; les raisons simplistes évoquées prouveraient tout aussi bien que la constante d'attraction universelle $G$ *doit* être nulle ! $\Lambda$, comme $G$, ne peut se déterminer que par des mesures.

De même en ce qui concerne le *paramètre de densité* $\Omega$ qui figure dans les modèles de Friedmann; une théorie sans support observationnel, physique ni géométrique a décrété $\Omega = 1$. Les mesures donnent plutôt $\Omega = 0.05$ ... Affaire à suivre.