

LE NOMBRE D'OR ET LE SYSTEME SOLAIRE

J-M. Souriau

Unité Propre de Recherche 7061

Septembre 1989

CPT-89/P.2296



Le Nombre d'or et le Système solaire

Jean-Marie Souriau

(Prétirage CPT 2296, septembre 1989)

1) PERIODES DES PLANETES

Voici les périodes de révolution des principales planètes du système solaire:

Mercure: 0.2408425
 Venus: 0.6151866
 Terre: 1.00000000
 Mars: 1.8808155
 Cérès-Pallas: 4.604 (1)
 Jupiter: 11.86178
 Saturne: 29.45665
 Uranus: 84.0189
 Neptune: 164.765
 Pluton: 247.68

Dans tous les cas, le rapport x d'un terme au suivant est compris entre $1/3$ et $2/3$.

2) RESONANCES

L'étude de la répartition des petites planètes a montré — sans qu'on possède de ce fait une explication très claire — que leur répartition évite les résonances entre orbites, principalement avec l'orbite de Jupiter.

A quelle condition le rapport x de deux périodes sera-t-il réputé résonant? S'il existe une fraction $q = \frac{n}{d}$ suffisamment proche de x .

Suffisamment en quel sens? Il y a longtemps qu'on connaît un "test de qualité" pour une telle approximation: il est mesuré par le nombre:

$$\theta = d^2 \times |x - q|$$

d désignant le dénominateur de la fraction irréductible q (Liouville, Hurwitz, etc.).

Nous appellerons *résonance* d'un rapport x (compris entre 0 et 1) toute fraction q pour laquelle le test θ est plus petit que pour les fractions 0 et 1 (0/1 et 1/1).

Voici la liste des résonances entre grosses planètes dont le test θ est inférieur à 0.1 (dénominateur $d \leq 10$):

Neptune-Pluton = $2/3 \times 0.9980$ ($\theta = 0.01$)
 Uranus-Neptune = $1/2 \times 1.0199$ (0.04)
 Uranus-Pluton = $1/3 \times 1.0176$ (0.05)
 Venus-Mars = $1/3 \times 0.9812$ (0.06)
 Jupiter-Saturne = $2/5 \times 1.0067$ (0.07)
 Jupiter-Uranus = $1/7 \times 0.9883$ (0.08)

Il existe des nombres x qui ne possèdent aucune résonance; dans l'intervalle $(1/3, 2/3)$ ce sont le nombre d'or $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180$ et son carré $\omega^2 = 0.3820$.

On peut aussi étudier les résonances dont le dénominateur est limité ($d \leq 10$ par exemple). Dans l'intervalle $(1/3, 2/3)$, les rapports sans résonances (en ce sens) sont ceux contenus dans les petits intervalles $[0.615, 0.619]$, $[0.381, 0.385]$, qui contiennent ω et ω^2 .

3) ANALYSE DE FOURIER

La table précédente montre que les deux planètes les plus lointaines, Neptune et Pluton, présentent des résonances particulièrement marquées. Nous allons les exclure dans la suite.

Une étude globale des résonances du système solaire s'obtient par analyse de Fourier du *logarithme de la période*.

On calcule pour cela la fonction complexe F suivante:

$$F(a) = \sum_{\text{planète}} e^{2i\pi \log_a (P_{\text{planète}})}$$

(planètes = Mercure à Uranus; P: périodes de révolution).

La figure suivante montre la représentation de la fonction $|F(a)|^4$ entre $1/3$ et $2/3$:

¹ Cérès et Pallas sont les deux plus grosses des petites planètes; leurs périodes ne diffèrent que de 3 jours.

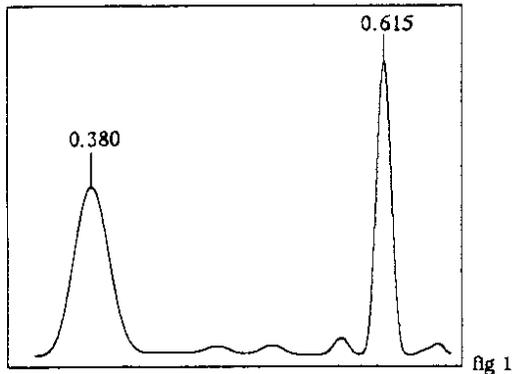


fig 1

Deux pics significatifs apparaissent, où sont indiqués la valeur de a (0.615 et 0.380).

Ces valeurs de a sont égales au nombre d'or et à son carré, à 5 pour mille près: elles sont situées dans la fourchette calculée plus haut (dénominateurs ≤ 10).

Elles indiquent que les rapports des périodes des planètes se groupent au voisinage des puissances entières de ω ; ce qui témoigne d'un effet global de *non-résonance* entre les différentes planètes.

4) LOI DOREE

On peut interpréter plus précisément cet effet en utilisant la transformation de Fourier réciproque: à partir d'un certain nombre de raies spectrales a_k , on construit la fonction Φ :

$$\Phi(P) = \sum_k F(a_k) e^{-2i\pi \log_{a_k}(P)}$$

les valeurs des périodes P_j sont alors proches de certains maximums de la partie réelle de Φ ⁽¹⁾.

Ainsi on interprète le spectre de la fig. 1 en calculant $\Re(\Phi(P))$ avec $a_1 = \omega$, $a_2 = \omega^2$. Ce qui fournit la courbe suivante, où sont portées les périodes réelles des planètes:

¹ A déduire de la formule:

$$\Re(\Phi(P)) = \sum_{j,k} \cos\left(2\pi \log_{a_k}\left(\frac{P_j}{P}\right)\right)$$

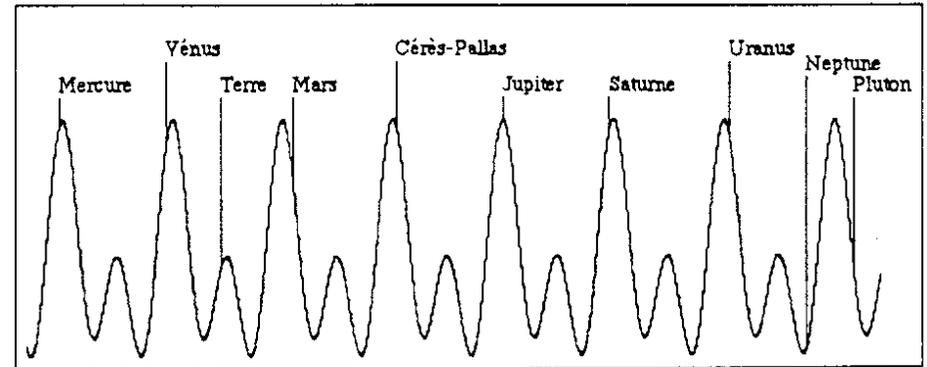


fig 2

Comme prévu, le couple Neptune-Pluton fait exception. En dehors de ce cas, on constate que les périodes des planètes se situent effectivement sur une progression géométrique de raison ω , et majoritairement sur une sous-progression de raison ω^2 (seule la Terre témoigne de la progression fine).

5) COMPARAISON AVEC LA LOI DE BODE

Grâce à la troisième loi de Kepler, cette "Loi Dorée" indique que les *diamètres* des orbites se répartissent, en majorité, sur une progression géométrique de raison $\omega^{4/3} = 0.526 = \frac{1}{1.900}$: le $n^{\text{ème}}$ diamètre à partir du centre est proche de $C^{\text{te}} \times 1.9^n$.

Le remplacement de 1.9 par 2 peut se compenser approximativement en ajoutant une constante: $1.9^n - 2.4 (0.4 + 0.3 \times 2^n)$ [$n = 2 \dots 6$]. On obtient ainsi la *loi de Titius-Bode* proprement dite — selon laquelle la planète numéro n ($n=1$ pour la Terre) est à la distance

$$0.4 + 0.3 \times 2^n$$

Cette loi est portée sur le graphique suivant sous une forme comparable à celle de la fig. 2:

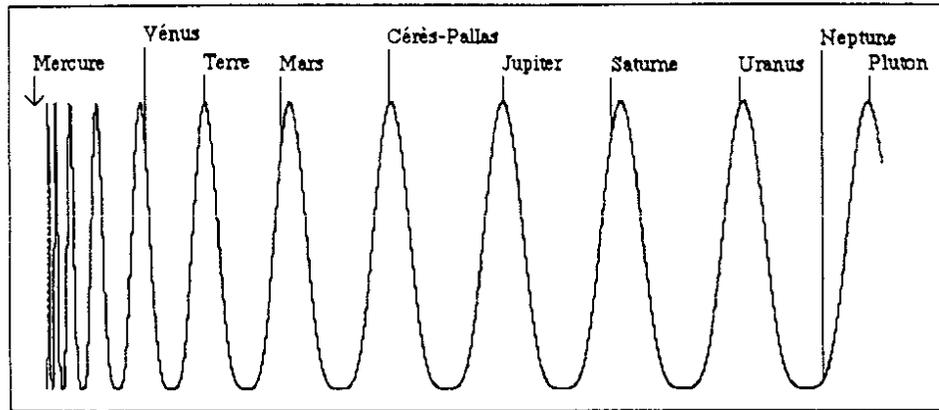


fig 3

L'effet asymptotique qu'on aperçoit à gauche montre comment la loi de Bode camoufle l'exception relative à la Terre: le rang de Mercure, qui devrait être $n = -1$, est remplacé arbitrairement par $-\infty$.

La comparaison des graphiques montre que l'approximation de la loi de Bode n'améliore pas sensiblement les prédictions de la Loi Dorée — malgré la présence d'un paramètre ajustable supplémentaire.

6) SATELLITES

Voici les périodes de révolution (en jours) de 14 satellites de Saturne:

0.502
0.613
0.629
0.694
0.695
0.942422 Mimas
1.370218 Encelade
1.887802 Thethys
2.736915 Dioné
4.51750 Rhéa
15.945452 I Titan
21.27666 Hypérior
79.33082 Japet
550.41 Phœbé

et le spectre correspondant:

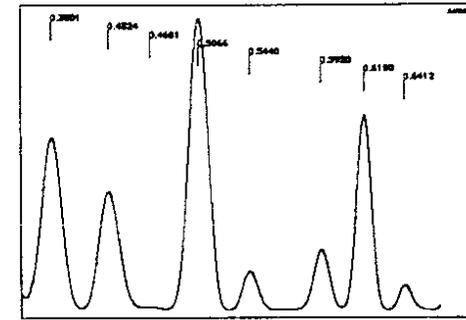


fig 4

Le spectre est plus complexe que celui des planètes, mais les raies ω et ω^2 y sont présentes avec une précision remarquable; ce qui implique encore une non-résonance globale.

En filtrant ces deux raies, on obtient comme précédemment une Loi Dorée dont voici la représentation:

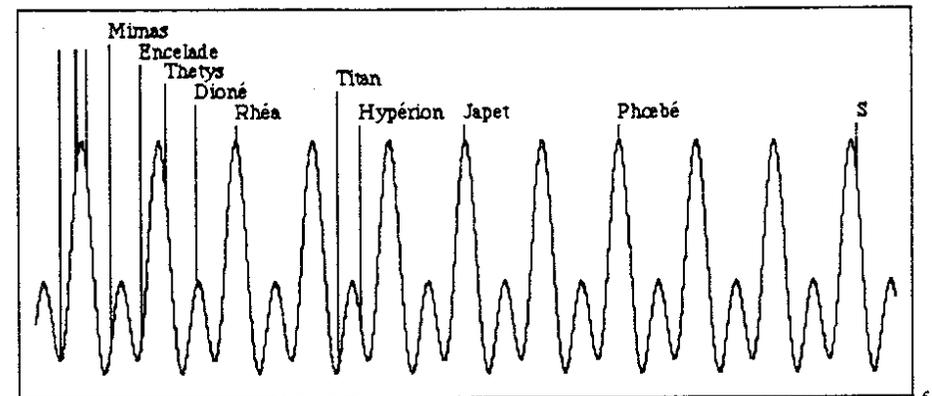


fig 5

Comme dans le cas du système solaire, il y a des exceptions notables: le satellite de 12 heures, Mimas et Encelade, Titan et Hyperion ⁽¹⁾. Mais par ailleurs il existe un nombre raisonnable de coïncidences (celles qui produisent les raies spectrales ω et ω^2).

La lettre S sur la figure ne désigne pas un satellite, mais simplement le Soleil (affecté bien entendu de la période de révolution de Saturne). Interprétation: la non-résonance concerne aussi les couples satellite-Soleil dans leur révolution relative à Saturne.

¹ Titan est le plus gros des satellites. A noter l'existence d'une résonance 3/4 entre Titan et Hypérior, avec un test $\theta = 0.009$.

Extrapolée de l'autre côté - celui des mouvements rapides — la même loi produit la courbe suivante:

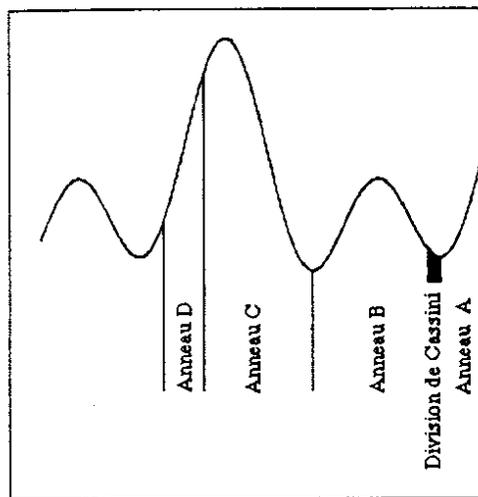


fig 6

qui est confrontée avec la disposition des anneaux de Saturne: peut-être respectent-ils eux aussi la Loi Dorée ⁽¹⁾.

A noter que l'ensemble des périodes concernées (des 5 heures des anneaux intérieurs aux 30 ans du Soleil) s'étend sur un intervalle $\omega^{22} \sim 40000$.

Les gros satellites de Jupiter présentent des résonances très marquées:

$$\text{Io-Europe} = 1/2 \times 0.9963 \quad (\theta = 0.007)$$

$$\text{Europe-Ganymède} = 1/2 \times 0.9927 \quad (\theta = 0.015)$$

$$\text{Ganymède-Callisto} = 3/7 \times 1.0003 \quad (\theta = 0.006)$$

Après leur élimination, on obtient le spectre suivant pour 12 autres satellites de Jupiter — et le Soleil:

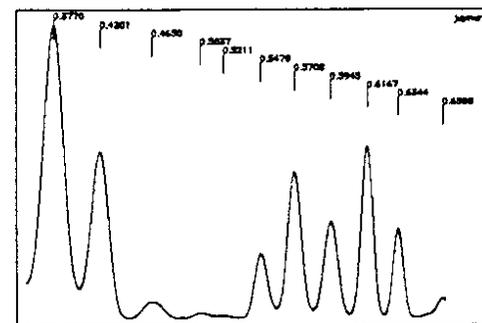


fig 7

Les raies les plus intenses du spectre correspondent encore précisément à ω et ω^2 . La Loi Dorée donne le résultat suivant:

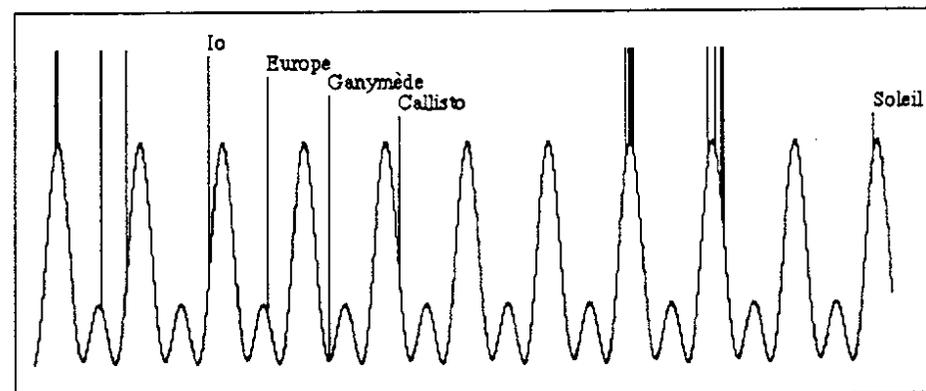


fig 8

6) CONCLUSIONS

Les régularités qui s'observent dans la répartition des planètes et des satellites peuvent s'interpréter en termes de non-résonance, ce qui fait jouer un rôle inattendu — mais raisonnable — au nombre d'or ω .

Une règle donc pour la formulation de cette régularité; peut-être un indice pour la recherche d'une causalité mécaniste ou thermodynamique.

¹ B est l'anneau le plus brillant; les anneaux ténus C et D devraient être regroupés.