



INTERACTIONS GALILEENNES

AIMANT-CHARGE

Jean-Marie Souriau*

Centre de Physique Théorique †

CNRS - Luminy - Case 907

F-13288 MARSEILLE CEDEX 9 (France)

Avril 1986

CPT-86/P.1894

* Université de Provence et Centre de Physique Théorique, Marseille

† Laboratoire propre du CNRS

INTERACTIONS GALILEENNES AIMANT-CHARGE

Jean-Marie Souriau

Université de Provence et Centre de Physique Théorique CNRS, Marseille

CPT - CNRS
Luminy, Case 907
F13288 Marseille Cedex 9

INTRODUCTION

La description d'un système matériel comportant des *aimants* et des *charges électriques* soulève quelques difficultés : le principe newtonien d'égalité de l'action et de la réaction semble violé.

Dans le cadre relativiste, nous sommes capables de décrire un tel système en traitant les forces électromagnétiques en termes de *champ* ; les équations assurent très généralement les conditions locales de conservation qui, par intégration, donneront les résultats escomptés.

Le bilan global est effectivement équilibré - mais il faut pour cela prendre en compte le champ électro-magnétique lui-même, *qui n'est pas confiné*. Le modèle relativiste prévoit donc que le système lui-même n'est pas conservatif, puisqu'il rayonne.

Même résultat, d'ailleurs, si nous considérons un système comportant des charges seules (pas d'aimant). Or dans ce cas on sait bien qu'existe, à côté du modèle radiatif relativiste, le modèle classique de Newton-Coulomb, qui ne rayonne pas et qui est une excellente approximation de la réalité.

D'où la question : la présence d'*aimants* est-elle compatible avec un modèle mécanique *classique* non-radiatif ?

Bien entendu, il faut se mettre d'accord sur le sens du mot *classique* dans cette question. La réponse est *non* si on postule qu'un système classique est un assemblage de points matériels en interaction hamiltonienne (mais à ce titre la mécanique des fluides ne serait pas classique) ; *oui* si on remplace le trop simpliste "formalisme hamiltonien" par la description *symplectique* de la mécanique.

Cette description symplectique est plus souple (indépendante du choix d'un système de coordonnées), plus précise (elle donne une description globale du système), mais surtout plus générale ; prenant en compte le principe de *relativité galiléenne*, elle permet de démontrer que la description d'un aimant comme système newtonien de points matériels est vouée à l'échec ; elle indique *par quoi il faut la remplacer*.

L'évolution du système est alors régie par un système d'équations différentielles ordinaires, possédant les intégrales premières qu'on attend en mécanique classique ; action et réactions sont effectivement équilibrées.

*
* *

On sait qu'une molécule ou un atome peut être considéré comme un système de particules chargées et aimantées, en interaction électro-magnétique ; mais aussi qu'il peut durer sans rayonner. Le modèle relativiste radiatif n'est donc pas réaliste dans ce cas.

La réponse traditionnelle à ce paradoxe est une invocation à la mécanique quantique. Mais de quelle mécanique quantique s'agit-il exactement ? Rappelons les phases de la description quantique fine de l'*atome d'hydrogène* * :

- on décrit le mouvement de l'électron (chargé et aimanté) soumis à la charge électrique du proton (supposé fixe) par l'équation relativiste de Dirac ; ce qui fournit le spectre de Rydberg avec la correction de *structure fine*.
- on tient compte du recul du proton en empruntant à la mécanique classique l'égalité de l'action et de la réaction ; ce qui corrige la *constante de Rydberg*.
- ces termes subissent ensuite une approximation pour construire un hamiltonien non relativiste.
- L'interaction des moments magnétiques des deux particules est ensuite traitée en empruntant un hamiltonien à la mécanique classique, en le "quantifiant" par une méthode heuristique, et en l'ajoutant : ce qui permet d'obtenir la *structure hyperfine* (raie à 21 cm).
- enfin on introduit une correction supplémentaire, issue de l'électrodynamique quantique (*l'effet Lamb*).

Comme tous les physiciens le savent, cette recette se justifie par ses résultats : elle conduit aux plus précises des prédictions de la physique théorique.

Mais il est clair que ces procédures, qui consistent à recoller des parties de théories incompatibles deux à deux, n'a pas de cohérence interne. Un exemple: les interactions aimant-charge (dites "spin-orbite") pourraient a priori être traitées comme les interaction aimant-aimant, en quantifiant un hamiltonien classique : or cette procédure conduirait à un résultat double de celui qui dérive de l'équation de Dirac, en contradiction donc avec

* Voir par exemple COHEN-TANNOUJJI, DIU, LALOE, "Mécanique quantique" (Hermann 1973), chapitre XII.

l'expérience : ce qui est bon pour les interactions aimant-aimant ne l'est pas pour les interactions aimant-charge. La précession de Thomas qu'on évoque à ce sujet ne relève évidemment pas d'une méthode unitaire qui aurait rendu nécessaire le facteur correctif $1/2$.

Pour éviter les états d'âme conceptuels, il faut donc croire à l'existence (platonicienne pour l'instant...) d'un modèle mathématique cohérent de l'atome, modèle dont les procédures ci-dessus constitueraient une bonne approximation.

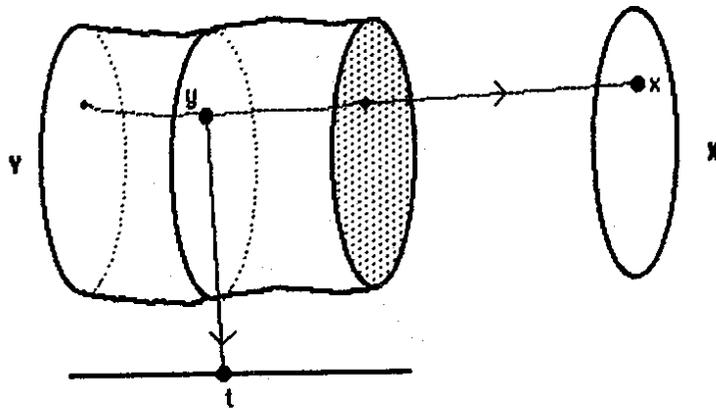
Dans cette hypothèse il devrait donc être possible de trouver d'autres approximations plus cohérentes et d'évaluer leur aptitude à la description des atomes réels.

Malgré sa vocation supposée à l'autonomie, la mécanique quantique ne se formule encore qu'en utilisant un modèle classique "sous-jacent" ; la construction galiléenne décrite ici est donc candidate à jouer ce rôle. De fait, sa quantification conduit à l'essentiel des résultats corrects - au niveau bien entendu d'une approximation non relativiste. La constante c qui figure dans ce modèle est purement phénoménologique - et n'a donc rien à voir, a priori, avec la célérité de la lumière.

Mais les règles de quantification qu'on utilise ici ont trop de flou dans leur formulation pour que leur réussite puisse être considérée comme un fait objectif. Il reste donc à examiner si les méthodes de *quantification géométrique* peuvent s'appliquer au présent modèle et conduire à des résultats compatibles avec les faits expérimentaux : ce problème fera l'objet d'un travail d'équipe ultérieur**.

1) MECANIQUE SYMPLECTIQUE

On part a priori des hypothèses suivantes :



(1)

** Voir DUVAL, ELHADAD, TUYNMAN, "Hyperfine interaction in a classical Hydrogen atom and Geometric Quantization", preprint CPT-Université d'Amsterdam, 1986.

L'ensemble X des mouvements d'un système dynamique constitue une *variété symplectique* : la variété X est munie d'une 2-forme σ_X , inversible et fermée, dont la dérivée extérieure $d\sigma_X$ est nulle.

(2)

Puisque σ_X est inversible, son rang est égal à la dimension de X ; or le rang d'une 2-forme est toujours pair ; nous noterons donc $2n$ cette dimension.

(3)

Comment un point x de X peut-il s'interpréter comme "mouvement du système" ? En lui associant, à chaque instant t , l'état y du système à cette date. Le déterminisme à la Laplace sera respecté si réciproquement, chaque état détermine un seul mouvement x .

Cette exigence se formule simplement : l'ensemble Y de tous les états doit être le produit cartésien $X \times \mathbb{R}$ de l'espace des mouvements X par la droite temporelle (voir figure) ; à ce titre donc, Y est une variété de dimension $2n+1$; l'image réciproque de σ_X par la projection $y \mapsto x$ est une 2-forme fermée σ_Y ; mais σ_Y n'est que "présymplectique", parce qu'elle n'est pas inversible.

En effet le noyau de σ_Y , qui se notera $\ker(\sigma_Y)$, a la dimension 1 ; il est constitué des vecteurs δy dont la projection est nulle sur X ; ce sont ainsi les vecteurs tangents aux courbes-mouvements qui feuilletent Y . Autrement dit, les *équations du mouvement* s'écrivent nécessairement :

(4)

$$dy/dt \in \ker(\sigma_Y)$$

(5)

Réciproquement, la donnée de la variété présymplectique (Y, σ_Y) suffit à décrire le système : en effet, elle détermine les équations du mouvement (4), qu'il suffit d'intégrer ; le théorème sur la différentiabilité des solutions des équations différentielles par rapport aux conditions initiales montre que l'ensemble abstrait X des solutions de ces équations possède une structure de *variété quotient* de Y ; du fait que la forme σ_Y est fermée, un théorème d'Elie Cartan montre que c'est un *invariant intégral absolu* des équations du mouvement, c'est-à-dire que σ_Y "descend" sur le quotient X , définissant une forme σ_X qui cette fois est symplectique.

(6)

Considérons l'exemple d'un *point matériel* : son état à une date t sera défini par sa position r et sa vitesse v ; après le choix d'un repère (et en particulier d'unités de longueur et de temps), nous considérerons t comme un nombre, r et v comme éléments de l'espace numérique \mathbb{R}^3 . La dimension de Y est 7, n vaut 3.

La forme présymplectique σ_V qui caractérise la dynamique du point, va incorporer deux éléments essentiels : la *masse* m du point, et la *force* F à laquelle il est soumis. En utilisant deux variations δ et δ' , elle sera donnée par la formule :

$$\sigma_V(\delta y, \delta' y) = \langle m \delta v - F \delta t, \delta' r - v \delta' t \rangle - \langle m \delta' v - F \delta' t, \delta r - v \delta t \rangle \quad (7)$$

les crochets \langle , \rangle désignant le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 . Il est immédiat que les équations du mouvement (4) s'écrivent ici :

$$dr/dt = v, \quad m dv/dt = F$$

et coïncident donc, comme il se doit, avec la loi de Newton.

Une variante est possible ; en ajoutant à σ_V la relevée d'une *2-forme arbitraire de l'espace-temps*, on obtient :

$$\sigma_V(\delta y, \delta' y) = \langle m \delta v, \delta' r - v \delta' t \rangle - \langle m \delta' v, \delta r - v \delta t \rangle + \langle E, \delta r \delta' t - \delta' r \delta t \rangle + \text{vol}(H, \delta r, \delta' r) \quad (8)$$

E et H désignant des vecteurs fonctions de r et de t , vol la 3-forme volume de l'espace orienté. Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$dr/dt = v, \quad m dv/dt = E - H \times v \quad (9)$$

le signe \times désignant le "produit vectoriel" de l'espace ; ceci permet donc de décrire des "forces de Laplace", comme les forces de Coriolis ou les forces magnétiques. Bien entendu les axiomes symplectiques vont imposer des conditions à E et H : explicitement :

$$\text{div } H = 0, \quad \text{rot } E + \partial H / \partial t = 0 ;$$

c'est bien ce qui se passe dans le cas des *forces électromagnétiques* que subit une particule chargée, puisqu'on reconnaît le premier groupe des *équations de Maxwell*.

2) RELATIVITE GALILEENNE

(10)

Les divers repères qui sont utilisés en mécanique (par exemple le repère terrestre) sont généralement accélérés les uns par rapport aux autres ; on passe de l'un à l'autre par l'action d'un groupe de dimension infinie, le *groupe de Coriolis*.

(11)

Le groupe de Coriolis possède un sous-groupe G de dimension 10, le *groupe de Galilée*, que l'on peut constituer avec des matrices de format 5×5 :

$$\begin{pmatrix} A & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A est une matrice 3×3 orthogonale et de déterminant 1 ($A \in \text{SO}(3)$), b et c sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 , e est un nombre.

Le groupe G agit sur l'espace-temps selon :

$$\begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Du fait que G n'est pas distingué dans le groupe de Coriolis, la définition de cette action n'est opérationnelle que si on l'accompagne du choix d'une famille particulière de repères - les *repères d'inertie* ; comme G est son propre normalisateur dans le groupe de Coriolis, les passages d'un repère d'inertie à un autre se font via G .

L'action du groupe de Galilée se relève à l'espace d'évolution d'un point matériel, selon les formules :

(12)

$$r \rightarrow Ar + bt + c$$

$$t \rightarrow t + e$$

$$v \rightarrow Av + b$$

(13)

Nous admettons - comme principe de la dynamique - que cette action s'étend à l'espace d'évolution de *tout système dynamique isolé*, et qu'elle *respecte les mouvements de ces systèmes* : si deux points y et y' appartiennent à un mouvement x , et si $g \in G$, $g(y)$ et $g(y')$ appartiendront encore à un même mouvement, que nous pourrions désigner par $g(x)$; définissant du même coup une action de G sur X .
Telle est la formulation dynamique de ce qu'on appelle aujourd'hui le principe de *relativité galiléenne*.

L'interprétation de ce principe est quasi-évidente dans le cas $b = 0$ (homogénéité du temps, homogénéité et isotropie de l'espace) ; la première vérification expérimentale d'un cas $b \neq 0$ a été faite en 1640 par Gassendi, sur une galère devant Marseille (b étant la vitesse de la galère par rapport aux quais).

(14)

Puisque les éléments de G agissent sur Y en respectant les courbes-mouvements, elles respectent aussi la direction tangente à ces courbes - c'est-à-dire $\ker(\sigma_Y)$ (Cf. (4)) ; nous admettrons ici un *principe de Galilée fort* (P.G.F.), à savoir que G respecte non seulement le noyau de σ_Y , mais en fait σ_Y elle-même ; ce qui s'écrira avec la notation des images réciproques :

$$g^*(\sigma_Y) = \sigma_Y \quad \forall g \in G$$

et entraînera le respect par l'action de G de la forme symplectique σ_X de X .

Chaque fois qu'un groupe de Lie G agit ainsi sur une variété (pré)-symplectique, une machinerie mathématique peut se déclencher, que nous n'analyserons pas ici techniquement* ; indiquons seulement quelques objets ((15) à (18)) que cette technique permet de construire.

(15)

L'action symplectique de G définit un objet mathématique m , élément d'un espace de cohomologie noté H^2 . Dans le cas du groupe de Galilée, la dimension de H^2 est 1, m est donc un scalaire : il s'agit de la *masse* (totale) du système.

(16)

Au moins localement, l'action de G est associée à une application $y \mapsto \mu$ de Y dans le dual \mathfrak{G}^* de l'algèbre de Lie. La variable μ s'appelle le *moment*.

Dans le cas galiléen, ce moment est un objet à 10 composantes ; il regroupe l'*impulsion* p , l'*énergie* e , le *moment cinétique* l et un objet g qui caractérise le mouvement du *centre de masse* G par la formule $mG = g + tp$.

Sur les 10 composantes de μ , 9 peuvent être complètement définies par voie géométrique ; la dernière, l'énergie, contient une constante additive irréductible. Ceci résulte du fait que H^1 , premier espace de cohomologie de \mathfrak{G} , est de dimension 1 dans le cas du groupe de Galilée.

(17)

G agit symplectiquement sur X comme sur Y ; du fait que ces actions sont équivariantes, on déduit qu'elles ont *même moment*. Par conséquent μ ne dépend de y que par l'intermédiaire de x , ses 10 composantes sont des *constantes du mouvement* : c'est la version symplectique du théorème de Noether.

Le fait que le barycentre G soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme (de vitesse p/m) s'appelle parfois "principe de l'inertie".

Pourquoi "principe" ? Parce que ce résultat ne s'obtient, dans la formulation newtonienne de la mécanique, qu'en postulant effectivement un principe ad hoc : l'*égalité de l'action et de la réaction*. Nous constaterons, dans le cas classique, que ce principe devient ici une *conséquence du principe de Galilée fort* (ci-dessous (30)) ; dans les cas plus

*voir par exemple J.M. Souriau, Travaux en cours, Rencontres de Balaruc II, pp. 53-91, 1985

généraux que nous allons rencontrer, nous substituerons donc le P.G.F. à l'égalité de l'action et de la réaction.

(18)

Il existe enfin une *décomposition* de l'espace des mouvements en produit cartésien ("décomposition barycentrique") ; X est le produit de l'espace des mouvements d'un point matériel libre (le centre de masse affecté de la masse totale) par un espace des "mouvements propres" ; deux des constituants de μ , le moment cinétique et l'énergie, se décomposent en sommes de grandeurs séparément conservées :
 - *moment cinétique propre* (fonction du seul mouvement propre) + *moment cinétique orbital* $g \times p/m$;
 - *énergie propre* + *énergie orbitale* $p^2/2m$.

On remarquera que l'*analyse dimensionnelle* classique découle d'une part de l'existence d'un groupe d'automorphismes du groupe de Galilée (permettant l'indépendance des unités L et T de longueur et de temps) ; et d'autre part de la possibilité d'un facteur constant arbitraire devant la forme σ elle-même - définissant une troisième unité fondamentale \mathcal{A} (*action*). Le statut cohomologique de la masse en fait alors une grandeur dérivée, de dimension $\mathcal{A}TL^{-2}$. Les équations aux dimensions des autres grandeurs galiléennes sont les suivantes :

| | | | |
|---------------------|---------------------|---------------|----------------------|
| p | e | l | g |
| $\mathcal{A}L^{-1}$ | $\mathcal{A}T^{-1}$ | \mathcal{A} | $\mathcal{A}TL^{-1}$ |

3) SYSTEMES ELEMENTAIRES

(19)

La technique précédente permet de reconstituer certains systèmes dynamiques à partir du seul groupe de Galilée : ce sont les "systèmes élémentaires", ceux pour lesquels l'action de G est transitive.

Dans ce cas l'espace des mouvements X et l'espace d'évolution Y sont des *quotients* de G ; l'action de G , la structure (pré)-symplectique sont déterminées géométriquement.

(20)

L'exemple le plus simple est celui du point matériel libre, dont la description symplectique est bien :

$$\sigma_Y(\delta y, \delta' y) = \langle m \delta v, \delta' r - v \delta' t \rangle - \langle m \delta v, \delta r - v \delta t \rangle$$

(Cf. (7) et (8)) ; l'action de G coïncidant avec la formule (12) ci-dessus.

(21)

Mais il existe un autre type d'objet élémentaire, plus subtil ; Y est le quotient de G par un groupe de rotations à un paramètre ; la dimension de Y vaut 9 ($n = 4$) ;

l'espace des mouvements propres est une sphère S^2 parcourue par un vecteur unitaire u de \mathbb{R}^3 ; l'énergie propre est nulle, le moment cinétique propre vaut :

$$su,$$

s étant un paramètre positif, caractéristique du système, que l'on appelle *spin*; son équation aux dimensions est \mathcal{A} ; (17) indique que le *vecteur spin* su pointe dans une direction fixe.

La forme symplectique correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_Y(\delta y, \delta' y) = & \\ \langle m \delta v, \delta' r - v \delta' t \rangle - \langle m \delta' v, \delta r - v \delta t \rangle & \\ - \text{vol}(su, \delta u, \delta' u); & \end{aligned} \quad (22)$$

l'action du groupe de Galilée s'obtient en joignant :

$$u \rightarrow Au \quad (23)$$

aux substitutions (12).

4) SYSTEMES ET INTERACTIONS

Considérons un système de points matériels libres (ou de particules à spin) qui évoluent indépendamment. On peut décrire l'espace des mouvements du système comme le produit cartésien des espaces individuels, les formes symplectiques étant simplement ajoutées; le moment total est la somme des moments individuels.

L'espace d'évolution présymplectique Y se construit canoniquement (Cf. (3)); nous noterons σ_0 la forme présymplectique "nue" ainsi définie sur Y^* .

Comment décrire maintenant les actions mutuelles de ces particules les unes sur les autres, telles qu'on les observe dans la nature?

A priori, par une *perturbation* de σ_0 ; perturbation qui permettra de décrire les forces que subissent ces points.

Par exemple, dans le cas d'un système de N points matériels, la forme symplectique totale (Cf. (8)) peut être considérée comme la somme de la forme nue :

$$\begin{aligned} \sigma_0(\delta y, \delta' y) = & \\ \sum_j \langle m_j \delta v_j, \delta' r_j - v_j \delta' t \rangle - \langle m_j \delta' v_j, \delta r_j - v_j \delta t \rangle & \end{aligned} \quad (25)$$

* Cette description doit être modifiée dans le cas de particules indiscernables - mais nous n'envisagerons pas ce cas ici.

et d'une perturbation responsable des forces :

$$\sum_j \langle E_j, \delta r_j \delta' t - \delta' r_j \delta t \rangle + \text{vol}(H_j, \delta r_j, \delta' r_j) \quad (26)$$

ce qui donne comme équations du mouvement le système différentiel :

$$dr_j / dt = v_j, \quad m_j dv_j / dt = E_j - H_j \times v_j \quad (27)$$

et permet donc effectivement de décrire le mouvement d'un système de particules soumises chacune à une force de type électromagnétique. Bien entendu la forme σ ainsi complétée reste astreinte au "principe de Maxwell" $d\sigma = 0$, ce qui fournit des conditions pour les fonctions E_j et H_j de y .

Comment exprimer le fait qu'il s'agit spécifiquement d'*interactions*, c'est-à-dire que les forces ont leur source dans le système lui-même ? Seulement en écrivant que ce système est encore *isolé*, et vérifie donc le principe de Galilée fort.

Nous pourrions alors appliquer tous les résultats énoncés plus haut : voici une partie des résultats de ce calcul, formulés dans un repère d'inertie :

$$\begin{aligned} H_j &= 0 \quad v_j \\ \sum_j E_j &= 0; \quad \sum_j r_j \times E_j = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Les conditions sur les forces E_j équivalent à l'existence d'une décomposition sous la forme :

$$E_j = \sum_k E_{jk} \quad (30)$$

avec

$$E_{jk} + E_{kj} = 0, \quad (r_j - r_k) \times E_{jk} = 0 \quad \forall j, k$$

Il s'agit bien, comme nous l'avions annoncé, du principe d'égalité d'action et de la réaction.

En écrivant l'existence globale de l'application moment, on fait apparaître un *hamiltonien d'interaction* h ; son équation aux dimension est $\mathcal{A}T^{-1}$; la perturbation due aux forces est simplement la dérivée extérieure de la 1-forme :

$$\omega = -h dt; \quad (31)$$

h est une fonction réelle de y , en fait des seules variables r_1, \dots, r_N (à l'exclusion donc des vitesses et du temps); h est invariante par l'action du groupe de Galilée (et ne

dépend donc que des distances mutuelles des points) ; les forces sont données par la formule :

$$E_j = - \partial h / \partial r_j \quad (32)$$

où l'on fait l'abus de notation usuel consistant à identifier vecteur et forme par l'utilisation de la métrique d'espace.

Enfin h est aussi un constituant de l'énergie du système, et plus précisément de l'énergie propre : l'énergie totale est la somme des termes cinétiques nus et de h - ce qui ne caractérise d'ailleurs h qu'à une constante additive près.

5) SOLUTION D'UN PARADOXE

Le paradoxe, c'est celui que nous avons énoncé au début : les H_j sont nécessairement nuls (29), et par conséquent le schéma proposé est incapable de décrire un aimant, source de champ magnétique.

Il faut donc changer quelque chose dans les hypothèses précédentes. Quoi donc ?

Une expérience de magnétisme peut le suggérer. En 1915, le physicien hollandais J. De Haas a fait des mesures précises de l'effet gyromagnétique : un cylindre de matériau ferro-magnétique, suspendu selon son axe, se met spontanément en rotation si on change le sens de son aimantation. De Haas a constaté que le rapport :

$$\frac{\Delta(\text{moment magnétique})}{\Delta(\text{moment cinétique})} \quad (35)$$

ainsi mis en évidence était fixe, en grandeur et en signe, et indépendant du matériau.

La constante universelle ainsi mesurée pouvait évidemment s'interpréter comme appartenant en propre à un objet élémentaire constituant de tous les aimants ferro-magnétiques ; constituant doué d'un moment magnétique propre et d'un moment cinétique propre, parallèles et d'intensités fixes.

À l'époque, l'électron était déjà connu et donc suspecté de tenir ce rôle ; pourtant ce n'est que dix ans plus tard qu'on a envisagé sérieusement le spin de l'électron, dans ses aspects quantiques (expérience de Stern et Gerlach) - alors que l'expérience de De Haas était une mesure macroscopique d'une propriété classique de ce spin.

Nous allons effectivement pouvoir décrire les aimants en incorporant des particules à spin dans le système ; particules dont la description symplectique nous a été obligeamment fournie par la géométrie du groupe de Galilée.

6) INTERACTIONS CHARGE-CHARGE ET AIMANT-AIMANT

L'interaction de deux particules électrisées est connue depuis Coulomb, et s'obtient par le hamiltonien d'interaction :

$$h = q_1 q_2 / |r_1 - r_2|, \quad (36)$$

q_1 et q_2 étant les charges électriques ; ceci s'étend immédiatement au cas des N corps :

$$h = \sum_{(j,k)} q_j q_k / |r_j - r_k| \quad (37)$$

la somme étant étendue aux $N(N-1)/2$ paires (j,k) .

Ce sont ces formules (36)-(37) qui définissent l'unité "électrostatique" de charge électrique ; l'équation aux dimensions correspondante est $(\mathcal{A}L^{-1})^{1/2}$.

Dans le cas de deux aimants dipolaires, l'interaction se laisse décrire par le hamiltonien :

$$h = \langle M_1, C'(r_1 - r_2) M_2 \rangle \quad (38)$$

où M_1 et M_2 sont les vecteurs "moment magnétique" des deux aimants et où C désigne la fonction vectorielle coulombienne :

$$C(r) = r / |r|^3 ; \quad (39)$$

C' est sa dérivée - donc une matrice 3×3 , qui est symétrique et de trace nulle.

Cette formule (38) peut être choisie comme définition de l'unité "magnétostatique" de moment magnétique ; l'équation aux dimensions correspondante est $(\mathcal{A}L^{3T-1})^{1/2}$.

L'interprétation de l'expérience de De Haas consiste donc à attribuer à l'électron (et à toute particule à spin) un moment magnétique parallèle à son moment cinétique propre, ce qui s'écrira avec la notation (21) :

$$M = \mu u, \quad (40)$$

μ , mesure (algébrique) du moment magnétique, étant une caractéristique de la particule. Dès 1924, W. Pauli avait proposé ce hamiltonien (38)-(40) pour expliquer la structure hyperfine du spectre de l'hydrogène, responsable en particulier de la raie à 21 cm observée en radio-astronomie.

Pour un système de N particules à spin aimantées, on sommerait simplement sur les paires :

$$h = \sum_{(j,k)} \langle u_j H_j, C'(r_j - r_k) (u_k H_k) \rangle \quad (41)$$

7) INTERACTIONS AIMANT-CHARGE

La situation est plus délicate dans le cas d'un système contenant à la fois des particules chargées et des particules aimantées.

Considérons d'abord un système à deux corps :

- n°1 : particule à spin aimantée sans charge;
- n°2 : point matériel chargé.

Nous savons que l'équation du mouvement de la particule chargée, soumise à une force électro-magnétique, doit s'écrire :

$$dr_2/dt = v_2, \quad m_2 dv_2/dt = q_2 [E - H \times v_2] \quad (42)$$

E et H étant des champs électrique et magnétique qu'elle subit - et qu'elle "reçoit" donc de la particule n°1 ; il faut d'autre part respecter l'égalité de l'action et de la réaction - que nous savons écrire ici sous la forme du P.G.F. (Cf.(17)) ; ces équations doivent donc être obtenues par une interaction invariante sous l'effet du groupe de Galilée.

Dans le cas d'un système de points matériels, une telle interaction s'obtenait en ajoutant à la forme nue σ_0 la dérivée d'une 1-forme invariante ω (Cf. (31)) ; même chose ici, mais avec une forme ω qui n'est plus hamiltonienne (qui ne s'écrit pas $-h dt$) ; nous choisirons :

$$\omega(\delta y) = 1/c \text{ vol}(\mu_1 u_1, q_2 C(r_2 - r_1), \delta[r_2 - r_1]) ; \quad (43)$$

c étant une constante phénoménologique dont la dimension LT^{-1} est celle d'une célérité. ω est visiblement invariante par l'action (12), (23) du groupe de Galilée sur chacune des particules constituant le système, donc aussi $d\omega$.

Avec le choix $\sigma = \sigma_0 + d\omega$, les équations générales (4) du mouvement :

$$dy/dt \in \ker(\sigma)$$

donnent bien pour la particule n°2 une équation du type (42) ; E et H ainsi déterminés (Cf. S8) sont solutions des équations de Maxwell (9) :

$$\text{div } H = 0, \quad \text{rot } E + \partial H / \partial t = 0,$$

et aussi des équations :

$$\text{rot } H = 0, \quad \text{div } E = 0, \quad (44)$$

qui tiennent lieu de second groupe des équations de Maxwell dans le cadre galiléen ; H est le champ magnétique d'un dipôle axé sur la particule n°1 ; E s'interprète comme *champo électrique de Faraday* ("créé" par le mouvement de l'aimant).

Puisque elle vérifie le P.G.F., la forme présymplectique proposée décrit aussi la *réaction* de la particule aimantée sous l'influence de la particule chargée en mouvement. L'expression détaillée de cette réaction s'obtient en prélevant, dans l'équation du mouvement (4), les équations concernant la particule aimantée (S8). On constate que cette réaction fait intervenir non seulement le champ électrique usuel, mais aussi un champ magnétique H_1 , expression quantitative de *l'effet Ørsted*.

A cause de l'invariance galiléenne, les résultats (15) à (18) sont toujours valables ; le mouvement du centre de masse est rectiligne et uniforme ; l'énergie du système, qui se réduit au terme cinétique :

$$e = 1/2 m_1 v_1^2 + 1/2 m_2 v_2^2 \quad (45)$$

est intégrale première des équations du mouvement. Ce qui manifeste évidemment le caractère *non hamiltonien* de l'interaction (Cf.(33)).

En revanche, il apparaît un objet nouveau, le *moment cinétique d'interaction* :

$$1/c [r_1 - r_2] \times [\mu_1 u_1 \times q_2 C(r_1 - r_2)] \quad (46)$$

qui s'ajoute au terme nu :

$$m_1 r_1 \times v_1 + u_1 s_1 + m_2 r_2 \times v_2 \quad (47)$$

pour constituer le moment cinétique total I , intégrale première du système de toutes les équations du mouvement.

8) LE SYSTEME à N CORPES

Nous pouvons passer facilement au cas d'un système de N particules à spin en interaction électromagnétique.

Nous avons décrit les interactions charge-charge et aimant-aimant par une 1-forme d'interaction hamiltonienne ω ((31)-(37) et (31)-(41)) ; il suffit de compléter σ par les termes croisés responsables des interactions aimant-charge, construits sur le modèle (43) ; ω est ainsi la somme, pour toutes les paires (j,k) , des 1-formes $\omega_{jk} (= \omega_{kj})$.

$$\begin{aligned} \omega_{jk}(\delta y) = & - \{q_j q_k / |r_j - r_k| + \langle \mu_j u_j, C(r_j - r_k)(\mu_k u_k) \rangle\} \delta t \\ & + 1/c \{ \text{vol}(\mu_j u_j, q_k C(r_j - r_k), \delta[r_j - r_k]) + \text{vol}(\mu_k u_k, q_j C(r_k - r_j), \delta[r_k - r_j]) \} \end{aligned}$$

Cette formule (48) implique une hypothèse supplémentaire : l'*universalité* de la constante c (on pourrait, a priori, choisir une constante c_{jk} pour chaque couple).

La forme présymplectique ainsi construite :

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{(j,k)} d\omega_{jk} \quad (49)$$

est visiblement fermée et invariante par l'action du groupe de Galilée ; elle détermine toute la dynamique du système.

Le calcul donne d'abord les constantes du mouvement qui composent le moment (notations (16)) :

(50)

$$\begin{aligned} \underline{p} &= \sum_j m_j \underline{v}_j \\ \underline{g} &= \sum_j m_j [r_j - \underline{v}_j t] \\ \underline{e} &= \sum_j 1/2 m_j \underline{v}_j^2 \\ &+ \sum_{(j,k)} q_j q_k / |r_j - r_k| + \langle \mu_j u_j, C(r_j - r_k)(\mu_k u_k) \rangle \\ \underline{l} &= \sum_j r_j \times m_j \underline{v}_j + s_j u_j \\ &+ 1/c \sum_{(j,k)} [r_j - r_k] \times \{ [q_k \mu_j u_j + q_j \mu_k u_k] \times C(r_j - r_k) \} \end{aligned}$$

Tous les termes s'interprètent classiquement - à l'exception de celui de la dernière ligne, qui représente le moment cinétique d'interaction (Cf.(46)). On constate ainsi que le centre de masse, déterminé par les formules usuelles, a bien un mouvement rectiligne uniforme de vitesse \underline{p}/m ;

Les équations du mouvement s'obtiennent en résolvant un système linéaire (4). Pour écrire le résultat de ce calcul, on peut utiliser les notations suivantes :

- On choisit le numéro j de l'une des particules ; dans les formules qui suivent, l'indice j sera sous-entendu ; on considère les quatre vecteurs \underline{E} , \underline{H} , \underline{F} , \underline{S} donnés par les formules :

(51)

$$\underline{E} = \sum_k q_k C(r - r_k)$$

$$\underline{H} = - \sum_k C'(r - r_k)(\mu_k u_k)$$

$$\underline{F} = \sum_k C(r - r_k) \times d(\mu_k u_k)/dt - C'(r - r_k)(\mu_k u_k) \times (\underline{v} - \underline{v}_k)$$

$$\underline{S} = \sum_k q_k C(r - r_k) \times (\underline{v} - \underline{v}_k)$$

où l'indice k prend toutes les valeurs *distinctes de j* ;

on pose :

(52)

$$\underline{\mathcal{E}} = \underline{E} + \underline{F}/c$$

$$\underline{\mathcal{H}} = \underline{H} + \underline{S}/c$$

Alors la particule n° j vérifie les équations :

(53)

$$\frac{d}{dt} \underline{r} = \underline{v}$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{s} u) = - \underline{\mathcal{H}} \times \underline{\mu} u$$

$$\frac{d}{dt} [m \underline{v} + \underline{\mu} u \times \underline{\mathcal{E}}/c] = q \underline{\mathcal{E}} + \left[\frac{\partial \underline{\mathcal{H}}}{\partial \underline{r}} \right]^* (\underline{\mu} u)$$

où le signe $*$ désigne la transposition des matrices.

Ces équations, écrites pour toutes les valeurs de j , constituent la solution du système (4). Dans le cas où le système contient aussi des points matériels, il suffit de négliger dans les équations (51) et (53) correspondantes les termes contenant \underline{u} .

Au terme en $1/c$ près, l'interprétation de ces équations du mouvement semble tout à fait classique : précession de spin, forces électrostatique et magnétostatique subie par une particule chargée et aimantée soumise à un champ électrique $\underline{\mathcal{E}}$ et un champ magnétique spatialement variable $\underline{\mathcal{H}}$.

Mais quelques remarques s'imposent : $\underline{\mathcal{E}}$ et $\underline{\mathcal{H}}$ ne sont pas de véritables "champs", parce qu'ils dépendent aussi de la vitesse \underline{v} (ce sont par contre de véritables

vecteurs d'espace vis à vis de l'action du groupe de Galilée); d'autre part le terme $m\mathbf{v} + \mu\mathbf{u} \times \mathbf{E}/\mathbf{c}$ ne peut pas s'interpréter comme impulsion de la particule n° j, puisque c'est la somme des simples termes $m\mathbf{v}$ qui est égale à l'impulsion totale; voir (50). Cependant les 1-formes ω_{jk} permettent de définir une impulsion individuelle \mathbf{p}_j , qui fait intervenir, en plus du terme $m\mathbf{v} + \mu\mathbf{u} \times \mathbf{E}/\mathbf{c}$, le potentiel-vecteur magnétique.

Le fait que les grandeurs (50) soient des constantes du mouvement, établi ici par voie géométrique, peut se contrôler à partir des équations du mouvement (53) par un calcul direct - mais ce calcul n'est pas particulièrement simple.

9) ENCORE UN PARADOXE

On peut essayer de traiter l'atome d'hydrogène comme un système de deux particules à spin, douées chacune d'une masse, d'un moment cinétique propre, d'une charge électrique et d'un moment magnétique, et en interaction selon le modèle ci-dessus.

Avec un peu de bonne volonté, on parvient à appliquer à ce système les recettes habituelles de "quantification" ; le résultat est satisfaisant, puisqu'il fournit le spectre de l'hydrogène, avec des valeurs correctes pour la structure fine et pour la structure hyperfine.

Mais ce résultat impose un choix précis pour la constante \mathbf{c} , à savoir :

(54)

$$\mathbf{c} = 2c,$$

(c = célérité de la lumière), alors que l'interprétation des termes \mathbf{F} et \mathbf{S} [ci-dessus (51),(52), (53)] par les formules de Faraday et de Biot-Savart imposerait

$$\mathbf{c} = c.$$

Ce paradoxe n'exprime pas une contradiction interne du modèle : le facteur \mathbf{c} appartient à la relativité galiléenne, et la célérité c de la lumière à la relativité d'Einstein. C'est pourquoi la valeur exacte du facteur correctif 1/2 pose un problème théorique, qui n'est d'ailleurs pas réservé au présent modèle (voir l'introduction).

Remerciements: ils s'adressent à C.Duval, J. Elhadad, G.M.Tuynman, pour de nombreuses mises au point concernant la géométrie, les calculs et l'interprétation de ce type de modèle.