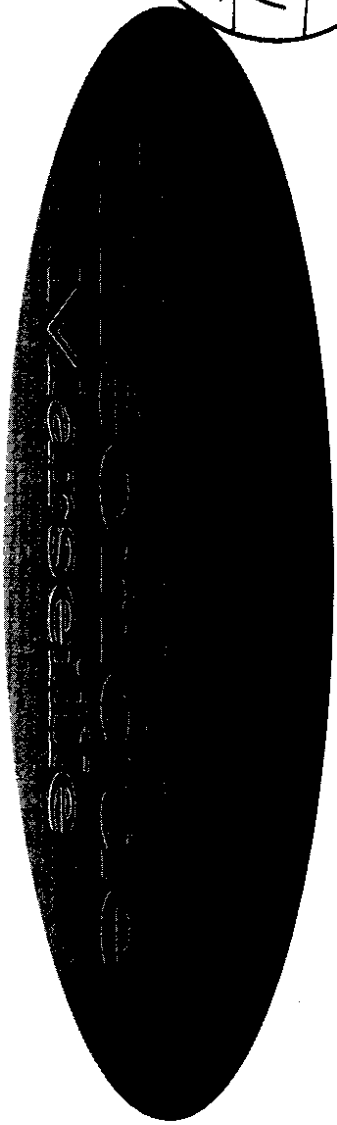
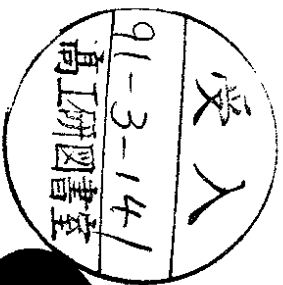




DES PARTICULES AUX ONDES : QUANTIFICATION GEOMETRIQUE *

Jean-Marie Souriau **

Unité Propre de Recherche 7061

Janvier 1991

CPT-91/P.2507

* Symposium International "Huygens principe : 1690-1990, Theory and Applications",
La Haye, 22 novembre 1990.

** et Université d'Aix-Marseille I, France.



DES PARTICULES AUX ONDES: QUANTIFICATION GEOMETRIQUE

Jean-Marie Souriau

Symposium International
Huygens principe : 1690 - 1990
Theory and Applications
La Haye, 22 novembre 1990

(1) géométrie de l'espace et du temps

(1.1) principe de relativité

- (1.1.1) des référentiels aux actions de groupe
- (1.1.2) la physique n'existe que comme géométrie
- (1.1.3) groupe actif et groupe passif

(1.2) le groupe de Galilée

- (1.2.1) construction
- (1.2.2) relativité élargie

(2) géométrie de la mécanique classique

(2.1) espace des mouvements

(2.2) lois de conservation

- (2.2.1) relativité de l'énergie
- (2.2.2) application moment

(2.3) mécanique universelle

- (2.3.1) groupe de Bargmann
- (2.3.2) linéarisation
- (2.3.3) action coadjointe
- (2.3.4) caractérisation du moment

(3) moins de classicisme

(3.1) du point matériel au photon

- (3.1.1) point matériel et orbite coadjointe

- (3.1.2) particules à spin

- (3.1.3) photon galiléen

(3.2) analyse dimensionnelle

- (3.2.1) normalisateur

- (3.2.2) équations aux dimensions

(3.3) relativité restreinte et générale

(4) analyse fonctionnelle convexe

(4.1) enveloppes

(4.2) matrices

- (4.2.1) définition

- (4.2.2) symétries

- (4.2.3) un peu d'ordre chez les matrices

(4.3) analyse harmonique

- (4.3.1) espace de Hilbert d'une matrice positive

- (4.3.2) représentation unitaire des symétries

- (4.3.3) états d'un groupe

- (4.3.4) représentations irréductibles

- (4.3.5) cas commutatif

(4.4) probabilités

- (4.4.1) probabilisation

- (4.4.2) probabilisation par le tore

- (4.4.3) spectres

- (4.4.4) observables

(5) quantification géométrique

(5.1) mécanique statistique

(5.2) états quantiques

- (5.2.1) définition des états quantiques

- (5.2.2) géométrie des états quantiques

- (5.2.3) mécanique quantique galiléenne

- (5.2.4) ondes

(5.3) coexistence

Sommaire

Chacun sait que les équations de la mécanique classique sont "invariantes" par divers changements de référentiel — par exemple par le passage d'un référentiel "immobile" à un référentiel "en mouvement de translation rectiligne uniforme". On sait aussi que ces propriétés d'invariance sont corrélatives de propriétés de conservation — comme le suggère le théorème de Noether.

On peut préciser le rôle de ces idées générales dans le cadre de la mécanique la plus classique : le *principe de relativité galiléen* caractérise l'invariance sans recourir aux référentiels (§ 1); l'application de ce principe aux grandeurs conservées conduit à la notion de *moment*, qui cristallise les "théorèmes généraux" de la mécanique (§ 2).

La *variance galiléenne du moment* pose un problème parfaitement classique, mais généralement éludé. Nous en exposons ici une solution géométrique qui conduit à quelques résultats inattendus: interprétation de l'*analyse dimensionnelle*; élargissement de la Mécanique Classique, qui permet une description simple des *particules à spin*, en particulier des *photons*; passage à la *Relativité Restreinte*; etc. (§ 3).

Pour passer des particules aux ondes, de la mécanique classique à la mécanique quantique, un outil mathématique adéquat est nécessaire. Nous l'introduisons ici sous une forme particulièrement économique: l'*analyse fonctionnelle convexe*, qui permet de donner en quelques lignes des définitions et des résultats essentiels concernant les *espaces de Hilbert*, les *représentations unitaires des groupes*, le *calcul des probabilités*, etc. (§ 4).

L'application de cet outil à la Mécanique Classique permet de définir simplement les *états quantiques*, et de montrer comment ces objets mathématiques génèrent les objets conceptuels courants de la Physique Quantique: *observations et observables*, *interprétation probabiliste*, *vecteurs d'état*, *opérateurs self-adjoints*, *loi de Planck*, *règle de Bohr*, *équation de Schrödinger*, *interprétation de Born*, etc. (§ 5).

Un exposé de quelques pages ne peut donner que des aperçus sur la Quantification Géométrique: quelques problèmes essentiels ne sont même pas évoqués. Mais les résultats exposés ici sont rigoureux, et plusieurs sont nouveaux.

(1) géométrie de l'espace et du temps

(1.1) principe de relativité

(1.1.1) des référentiels aux actions de groupe

exégèse du principe naïf

Le *principe de relativité*, sous sa forme classique, affirme que "les lois de la physique sont indépendantes du référentiel"; proposition énigmatique qu'on peut essayer d'interpréter.

En principe, un *référentiel*, c'est un système de coordonnées de l'espace et du temps, qu'on utilise pour décrire les phénomènes physiques.

Soit A un phénomène, observé depuis un référentiel B . Si B' est un autre référentiel, les mêmes lois sont valables dans B' : elles admettent donc l'existence d'un phénomène A' qui, relativement à B' , serait comme A relativement à B (fig.1). Ce que nous écrivons:

$$A' / B' = A / B$$

Une analogie avec la "règle de trois" suggère de transformer cette écriture, par "échange des termes moyens", en $A' / A = B' / B$; ou encore, en choisissant un nom :

$$A' / A = B' / B = g$$

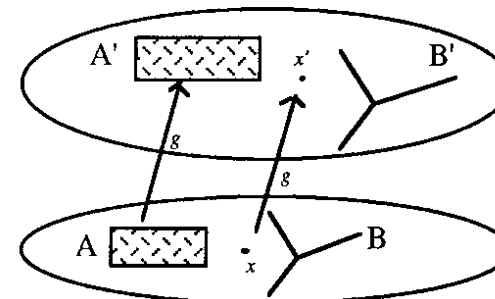


fig. 1

Alors g apparaît comme un symbole qui fait passer du référentiel B au référentiel B' , et aussi du phénomène A au phénomène A' . Ecrivons :

$$A' = g(A), B' = g(B)$$

On peut concevoir $g = B' / B$ comme la *correspondance* entre un point x et le point x'

qui, dans le référentiel B' , a les mêmes coordonnées que x dans B .

Une telle correspondance entre expériences, construite à partir d'une correspondance entre points de l'espace et du temps, a été analysée dès le seizième siècle par GIORDANO BRUNO (1).

un groupe

Quelle différence de nature y a-t-il entre référentiel et phénomène physique ? En principe, le référentiel n'implique que *l'espace et le temps*; mais tout référentiel utilisable possède un support matériel, il est inclus dans l'univers physique. A ce titre, les référentiels eux-mêmes doivent pouvoir être transportés : si B, B' et A sont trois référentiels, il doit exister un référentiel A' tel que $A'/A = B'/B$. Cette proposition, implicitement contenue dans le principe de relativité, a une traduction mathématique simple : l'ensemble G des transformations d'espace-temps g associés aux couples de référentiels est un *groupe*.

une action

Autre contenu implicite : revenons à la figure 1; complétons-la par un troisième référentiel B'' , donc par un phénomène A'' tel que :

$$A''/B'' = A'/B' = A/B$$

ce qui peut se décomposer en :

$$A''/A = B''/B = g$$

$$A''/A' = B''/B' = g'$$

$$A'/A = B'/B = g''$$

Par construction, $g = B''/B$ est la composée $(B''/B')(B'/B) = g'g''$ dans le groupe G .

D'autre part on a $A'' = g(A)$, et aussi $A'' = g'(A') = g'(g''(A))$; d'où la règle :

$$[g'g''](A) = g'(g''(A))$$

qui s'appelle mathématiquement *action de groupe* (2). D'où un nouvel énoncé du principe

¹ Dans la *Cena de le Ceneri* (1584), Bruno pense une expérience: la chute verticale d'une pierre lâchée sans vitesse sur la rive d'un fleuve; et il explique qu'elle sera identique si on la fait sur un bateau entraîné par le courant. En effet la main de l'expérimentateur du bateau, vue de la rive, communique à la pierre l'exacte vitesse initiale (*virtus impressa*) qui lui permet d'adopter un mouvement qui sera vertical pour le navigateur. Conclusion: notre expérience quotidienne n'empêche pas l'existence d'un mouvement de la Terre dans l'espace, contrairement à l'opinion d'Aristote. GALILEE reprend l'argument en 1632 (*Dialogue sur les principaux systèmes du Monde*) — sans citer sa source; sage prudence... Il semble que l'expérience réelle ait été faite vers 1640, au port de Marseille, par GASSENDI.

² Une *action* d'un groupe G sur un ensemble X , c'est une correspondance qui associe à tout couple (g, x) un élément $g(x)$ de X , et qui vérifie les règles suivantes: $[g'g''](x) = g'(g''(x))$, $e(x) = x$ (e : élément neutre).

de relativité, où n'apparaissent plus les référentiels:

il existe un groupe G ,
qui agit sur l'espace-temps et sur la matière,
et qui transforme tout phénomène possible en phénomène possible

(1.1.2) la physique n'existe que comme géométrie

La physique se légitime par la *reproductibilité des expériences*; reproduire une expérience A , c'est produire une expérience identique A' . Identique, en ce sens qu'elle constitue *la même solution* des lois de la physique, mais nécessairement dans un référentiel différent, faute de quoi il n'y aurait qu'une seule expérience.

Autrement dit, reproduire une expérience réelle A , c'est rendre *réelle* une expérience $A' = g(A)$, ($g \in G$), dont le principe de relativité implique la *possibilité*.

C'est donc le principe de relativité qui légitime la physique; et la codification de ce principe par une action de groupe lui confère le statut d'une *géométrie* (FELIX KLEIN, Programme d'Erlangen, 1872).

(1.1.3) groupe actif et groupe passif

Le choix du groupe G ne nous appartient pas : seule l'expérience permet de le déterminer. Cependant un certain arbitraire est à notre disposition — en ce qui concerne les référentiels. Plus précisément, le choix de l'un d'eux, soit B_0 , peut se faire à la convenance du métrologue; alors les autres s'en déduisent par l'action du groupe "naturel" G . Pour des raisons pratiques il arrive qu'on change toute la famille des référentiels sans changer le groupe, et la physique n'en est pas pour autant bouleversée (3).

Considérons plus précisément les référentiels $B_0, B, B', \dots$ comme des correspondances coordonnées $\rightarrow$ point; alors la relation $B'/B = g$ s'écrit par une composition d'applications: $B' = g \circ B$, ou encore $g = B' \circ B^{-1}$.

Parallèlement, la formule numérique de "changement de référentiel" qui fait passer des coordonnées dans B' aux coordonnées dans B , c'est $\gamma = B^{-1} \circ B'$. Il est clair que l'ensemble des γ est donné par la formule :

³ C'est ce qui s'est produit quand les physiciens sont passés du système CGS au système MKS.

$$\gamma = B_0^{-1} \circ g \circ B_0 \quad g \in G$$

et constitue donc un groupe Γ , isomorphe au groupe G ; nous le désignerons comme groupe "passif" — le groupe "actif" étant G . D'où une technique pour définir le groupe actif :

- choisir un référentiel initial B_0 — opération *métrologique*.
- définir le groupe passif Γ , opération *mathématique*, puisqu'il s'agit de fonctions numériques.
- alors le groupe actif est constitué des $g = B_0 \circ \gamma \circ B_0^{-1}$.

(1.2) le groupe de Galilée

(1.2.1) construction

Construisons de cette façon le *groupe de Galilée*.

Il faut commencer par choisir un référentiel initial : la métrologie repère un "point de l'espace" par trois *coordonnées cartésiennes* classiques, que l'on peut ranger en une matrice-colonne $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$; de même, la chronométrie repère un "instant" par un nombre $t \in \mathbb{R}$.

On construit ensuite le groupe de Galilée (passif) par les règles suivantes :

La géométrie classique met en oeuvre le *groupe d'Euclide*, engendré par les "translations" de l'espace $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{c} \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

et les "rotations" :

$$\vec{r} \rightarrow A\vec{r} \quad A \in \text{SO}(3) \quad (4)$$

Composant ces déplacements euclidiens avec les translations temporelles :

$$t \rightarrow t + e \quad e \in \mathbb{R},$$

on obtient le *groupe d'Aristote*, qui agit sur l'*espace-temps* $E_4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$

Les transformations :

$$(\vec{r}, t) \rightarrow (\vec{r} + \vec{b}t, t) \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

constituent le *groupe de Bruno*; par composition avec le groupe d'Aristote, on

obtient enfin le *groupe de Galilée*.

Au total celui-ci se représente par les matrices $\begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ agissant sur l'espace-

temps selon la formule :

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & \vec{b} & \vec{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pourrait essayer de continuer, par exemple avec les dilatations spatiales : $\vec{r} \rightarrow L \vec{r}$; mais ça ne marche pas : un atome grossi deux fois, c'est un objet *impossible*.

C'est l'expérience qui a déterminé le choix du groupe de Galilée — et qui peut le remettre en cause.

(1.2.2) relativité élargie

Dans l'analyse qui a conduit à l'énoncé du principe de relativité (1.1.1), les éléments du groupe G sont apparus comme des transformations ponctuelles $x \mapsto x'$ d'espace-temps (fig.1); autrement dit, si B et B' sont deux référentiels, il existe *un seul* élément g du groupe tel que $g(B) = B'$; on dit que l'action de G sur les référentiels est *effective*.

Mais cette condition n'a rien d'indispensable, et en fait, elle ne figure pas dans l'énoncé que nous avons proposé (encadré 1.1.1). Il s'agit donc d'un principe élargi : il permet l'existence d'un sous-groupe J de G (*groupe de jauge*) qui agit effectivement sur la matière, mais qui laisse fixes les référentiels; J est nécessairement un sous-groupe distingué, et c'est le groupe quotient $G' = G/J$ qui agit effectivement sur l'espace-temps. Autrement dit, il est possible que le groupe "physique" G soit une extension (par J) du groupe spatio-temporel G' ⁽⁵⁾.

Nous allons construire et utiliser une telle extension G du groupe de Galilée G' .

⁴ A est une matrice 3 sur 3, représentant la rotation; ce qui s'écrit $A \in \text{SO}(3)$.

⁵ Un exemple: le *revêtement universel* du groupe de Galilée produit un groupe de jauge à deux éléments; il intervient dans la physique des *fermions*.

(2) géométrie de la mécanique classique

'...la vraie Philosophie, dans laquelle on conçoit la cause de tous les effets naturels par des raisons de mécanique. Ce qu'il faut faire, à mon avis, ou bien renoncer à toute espérance de jamais rien comprendre dans la Physique'

Christiaan Huygens, *Traité de la Lumière*, 1690

(2.1) espace des mouvements

Suivant le précepte de Huygens, empruntons un premier modèle de matière à la *mécanique classique* : il s'agira d'un système à n corps, constitué de n "points matériels" qui interagissent par des forces dérivant d'un potentiel V .

Le système en mouvement est décrit par ses "éphémérides" : n courbes décrites par les n points dans l'espace-temps E_4 ⁽⁶⁾. La connaissance d'un mouvement x implique en particulier, à chaque instant t , la connaissance des positions $\vec{r}_j$ et des vitesses $\vec{v}_j$ de tous les points.

Réciproquement, les *équations du mouvement* de Newton déterminent complètement chaque mouvement x à partir d'une *condition initiale* :

$$y = (t, \vec{r}_j, \vec{v}_j)$$

choisie à une date arbitraire t : ce qui fait de l'ensemble X de tous les mouvements possibles une *variété* ⁽⁷⁾.

Considérons le cas d'un système isolé ⁽⁸⁾. Puisqu'un mouvement x du système est une

⁶ Il ne s'agit donc pas des trajectoires dans l'espace E_3 , qui ne comportent pas la loi horaire.

⁷ Chaque condition initiale y est un point de l'espace numérique $\mathbb{R}^{1+6n}$; la structure différentielle de l'ensemble X est caractérisée par le fait que l'application $y \mapsto x$ soit une *submersion* ; si le potentiel V est lisse, X est une variété lisse de dimension $6n$; si les mouvements sont *éternels* (pas de collisions), cette variété est *séparée*. Voir J.M.SOURIAU, *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod Ed. (1969).

⁸ Il est difficile de définir objectivement un *système isolé* ; et peut-être encore plus difficile de définir un *système non isolé*. Ce qui n'empêche pas ces notions de faire partie de la pratique fondatrice de la mécanique et de la physique.

figure tracée dans l'espace-temps E_4 , et que le groupe de Galilée G agit sur E_4 , nous savons définir l'image $g(x)$ du mouvement x par $g \in G$. Le principe de relativité galiléenne affirme que $g(x)$ est encore un mouvement possible du système ⁽⁹⁾.

Ainsi se définit une *action du groupe de Galilée sur l'espace X des mouvements possibles du système matériel*.

(2.2) lois de conservation

Dans ce cas, les théorèmes généraux de la mécanique nous apprennent l'existence de certaines "*grandeurs conservées*" ou "*constantes du mouvement*", telles que *l'énergie* ⁽¹⁰⁾ :

$$E = \frac{1}{2} \sum_j m_j \|\vec{v}_j\|^2 + V(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_n)$$

et le *moment cinétique* ^(11,12) :

$$\vec{L} = \sum_j m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j$$

Constantes du mouvement, en ce sens que E et $\vec{L}$, exprimés ici en fonction d'une condition initiale $y = (t, \vec{r}_j, \vec{v}_j)$ à une date t , ne dépendent que du mouvement x engendré par y .

⁹ Ceci permet de démontrer que le potentiel V ne dépend que des distances mutuelles des points $\vec{r}_j$. Le discours traditionnel de la mécanique — qui ignore le groupe de Galilée — invoque pour arriver au même résultat la notion de *force intérieure*, le principe d'égalité de l'action et de la réaction, et un principe supplémentaire: les forces "*ne dépendent pas du temps*".

¹⁰ CHRISTIAAN HUYGENS; GOTTFRIED LEIBNIZ; DANIEL BERNOULLI (1748). LAGRANGE écrit dans la *Mécanique Analytique* (deuxième édition, 1811): "Huygens ... inventa un principe nouveau ... devenu célèbre depuis sous le nom de *conservation des forces vives*" ... "l'équation $T+V = H$, laquelle exprime la *conservation des forces vives*". Le choix par Lagrange de cette lettre H pour désigner l'énergie apparaît donc comme un hommage à Huygens. N'y voyons donc par un "hamiltonien": WILLIAM ROWAN HAMILTON fut un génie précoce, mais il est né en 1805...

¹¹ ISAAC NEWTON; DANIEL BERNOULLI; PATRICK D'ARCY (1747).

¹² La notation $\vec{a} \times \vec{b}$ désigne l'opération du *produit extérieur* de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Nous écrivons aussi $\text{ext}(\vec{a}) \vec{b}$, définissant ainsi la matrice antisymétrique $\text{ext}(\vec{a})$.

(2.2.1) relativité de l'énergie

L'action du groupe de Galilée sur l'espace des mouvements était évidente. Mais comment modifie-t-il les grandeurs conservées ?

La question est bien posée, parce que ces grandeurs sont définies en fonction des conditions initiales, et que le groupe agit sur ces conditions initiales ⁽¹³⁾. Etudions par exemple l'action du *groupe de Bruno*, indexé par une vitesse d'entraînement $\vec{b}$.

Un calcul élémentaire donne l'énergie du mouvement modifié; sa nouvelle valeur est une forme quadratique en $\vec{b}$:

$$E \rightarrow E + \langle \vec{p}, \vec{b} \rangle + m \frac{\|\vec{b}\|^2}{2}$$

dont les coefficients $\vec{p}, m$ sont nécessairement des constantes du mouvement ⁽¹⁴⁾.

Lesquelles? il s'agit de l'impulsion $\vec{p} = \sum_j m_j \vec{v}_j$, et de la masse totale $m = \sum_j m_j$.

De même l'action sur le moment cinétique est affine en $\vec{b}$:

$$\vec{l} \rightarrow \vec{l} + \vec{g} \times \vec{b}$$

et définit une nouvelle constante du mouvement $\vec{g} = \vec{r} m - \vec{p} t$, $\vec{r}$ étant le *centre de masse* $\frac{1}{m} \sum_j m_j \vec{r}_j$ ⁽¹⁵⁾.

¹³ On connaît séparément l'action du groupe sur un mouvement x et sur une date t ; or les équations de Newton identifient canoniquement une condition initiale à un couple (x, t) .

¹⁴ C'est par un raisonnement relativiste de ce type que Huygens établit la conservation de l'impulsion dans un choc élastique (*De motu corporum ex percussione*): "mouvement des corps, vitesses égales ou inégales, ces expressions doivent être entendues *relativement* à d'autres corps qui sont considérés comme au repos, quoiqu'il puisse arriver que les seconds et les premiers soient entraînés dans un mouvement commun". Et en ce qui concerne le choc de deux sphères dures: "imaginons un navire transporté le long de la rive par le courant d'un fleuve...; les sphères rebondissent à des vitesses égales par rapport au navire..." [symétrie + conservation de l'énergie]; "par rapport à la rive..."; etc.

¹⁵ La conservation de $\vec{g}$ implique donc un mouvement rectiligne uniforme du centre de masse (*principe de l'inertie de Galilée*), avec la vitesse $\vec{p}/m$.

(2.2.2) application moment

On peut continuer ce calcul: on trouve facilement les 20 formules qui donnent les nouvelles valeurs de $\vec{l}, \vec{g}, \vec{p}, E, m$ lorsqu'on fait agir sur le mouvement les générateurs $A, \vec{b}, \vec{c}, e$ du groupe de Galilée.

Aucune grandeur conservée nouvelle n'apparaît: autrement dit, il existe une *action* du groupe de Galilée sur l'objet composite :

$$\chi = \left(\vec{l}, \vec{g}, \vec{p}, E, m \right);$$

χ s'appelle le *moment*; c'est une constante du mouvement via une application J : $x \mapsto \chi$, dite *application moment* (fig. 2).

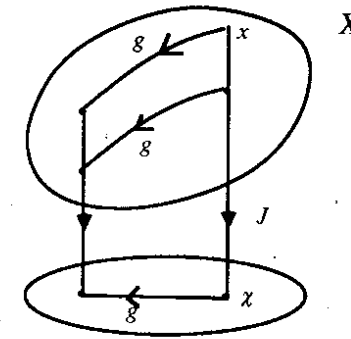


fig. 2

(2.3) mécanique universelle

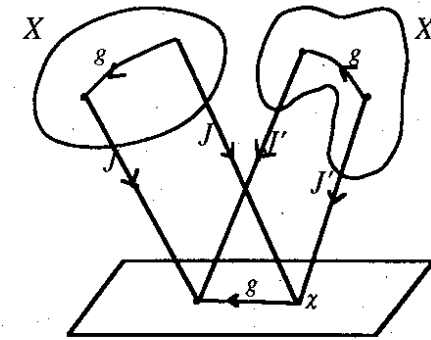


fig. 3

Cette action du groupe de Galilée sur χ est *universelle*: les formules qui la définissent sont valables pour tout autre système mécanique isolé X' , qui peut différer de X par le poten-

tiel, les masses, le nombre de points (fig.3).

Nous allons chercher une *caractérisation géométrique* de cette action universelle.

(2.3.1) groupe de Bargmann

Il faut d'abord caractériser géométriquement le groupe de Galilée lui-même, que nous n'avons construit que par morceaux, en suivant un schéma "historique".

Un artifice efficace ⁽¹⁶⁾ consiste à ajouter une *cinquième dimension* u à l'espace-temps, constituant ainsi un espace E_5 , parcouru par le point $k = (u, \vec{r}, t)$.

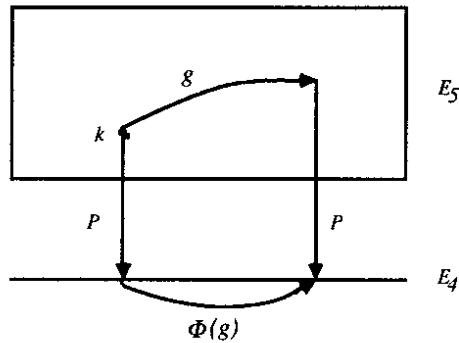


fig. 4

E_5 est évidemment munie d'une *projection* P sur l'espace-temps E_4 (fig.4) :

$$P(u, \vec{r}, t) = (\vec{r}, t)$$

Nous lui attribuons *a priori* la métrique euclidienne suivante :

$$ds^2 = d\vec{r}^2 - 2 dt du$$

Avec ces seuls ingrédients (projection, métrique), on définit le groupe de Galilée en trois stades :

- i) Dans le groupe des *isométries* g de E_5 , celles qui agissent "verticalement" :
- $$P \circ g = P$$

constituent un sous-groupe commutatif, le *groupe de jauge* :

$$g(u, \vec{r}, t) = (u+f, \vec{r}, t) \quad f \in \mathbb{R}$$

ii) Appelons *groupe de Bargmann* le commutant G du groupe de jauge dans le groupe des isométries ⁽¹⁷⁾. Un calcul élémentaire montre qu'on peut le représenter par les matrices :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \text{scal}(\vec{b})A & \frac{\|\vec{b}\|^2}{2} & f \\ 0 & A & \vec{b} & \vec{c} \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \in \text{SO}(3); \quad \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3; \quad e, f \in \mathbb{R} \quad (18)$$

agissant sur E_5 selon :

$$\begin{pmatrix} u \\ \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow g \begin{pmatrix} u \\ \vec{r} \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

iii) La projection de $g(k)$ ne dépend de k que par sa projection (fig.4); ce qui définit un morphisme de groupe Φ :

$$\Phi(g) \circ P = P \circ g$$

Alors le *groupe de Galilée* se définit comme l'image de G par Φ ⁽¹⁹⁾.

(2.3.2) linéarisation

Utilisons maintenant l'*algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ d'un *groupe de Lie* G , que nous allons considérer comme "*linéarisation*" de G .

On peut définir $\mathfrak{g}$ comme l'ensemble des "éléments infinitésimaux" de G , c'est-à-dire

¹⁷ Plus précisément la *composante neutre*. On obtient le groupe complet en prenant la matrice A dans $O(3)$ au lieu de $SO(3)$.

¹⁸ $\text{scal}(\vec{b})$ est la matrice ligne transposée de la matrice colonne $\vec{b}$.

¹⁹ Le *noyau* de Φ est le groupe de jauge, qui est aussi le *centre* de G . Ainsi le *groupe de Bargmann* G est une "extension centrale" du groupe de Galilée.

¹⁶ C.DUVAL, G.BURDET, H.P.KUNZLE, M.PERRIN, Phys. Rev. D, 31 1841-1853 (1985).

des morphismes continus $g : \mathbb{R} \rightarrow G$; ce qui permet de définir dans $\mathcal{G}$ la *multiplication par un réel* :

$$[gs](r) = g(sr) \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad s, r \in \mathbb{R}$$

L'application exponentielle $\mathcal{G} \rightarrow G$ se définit comme :

$$\exp(g) = g(1) \quad \forall g \in \mathcal{G}$$

d'où :

$$g(r) = \exp(gr) \quad \forall g \in \mathcal{G}, r \in \mathbb{R}$$

Tout automorphisme continu A de G agit canoniquement sur $\mathcal{G}$ par composition; les automorphismes intérieurs définissent ainsi l'*action adjointe* de G sur $\mathcal{G}$ par :

$$Ad(g)(g)(r) = g \cdot g(r) \cdot g^{-1}$$

La mécanique universelle requiert aussi l'*addition* dans $\mathcal{G}$ ⁽²⁰⁾, qu'on peut définir par :

$$[g+g'](r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[g\left(\frac{r}{n}\right) g'\left(\frac{r}{n}\right) \right]^n$$

Le linéarisé $\mathcal{G}$, muni de cette addition, devient un *groupe commutatif* (et aussi un espace vectoriel réel). Alors le linéarisé d'un sous-groupe de G est un sous-groupe du linéarisé de G .

Dans le cas du groupe de Bargmann, G est un groupe de matrices, donc un sous-groupe du groupe linéaire; ce qui permet d'induire l'exponentielle sur $\mathcal{G}$ par l'exponentielle matricielle. Ainsi $\mathcal{G}$ s'identifie à l'espace vectoriel des matrices :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & scal(\vec{\beta}) & 0 & \phi \\ 0 & ext(\vec{\omega}) & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\vec{\omega}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) \in \mathbb{R}^3$, $\phi, \varepsilon \in \mathbb{R}$; notations $scal, ext$: voir les notes 18, 12).

L'action adjointe se calcule matriciellement par :

$$Ad(g)(g) = g \cdot g \cdot g^{-1} \quad \forall g \in G, g \in \mathcal{G}$$

(2.3.3) action coadjointe

Nous allons maintenant associer à un groupe G un nouvel objet $\hat{\mathcal{G}}$, appelé *dual* de $\mathcal{G}$. Notons $\mathbb{T}$ le *tore*, c'est-à-dire le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 ; tout morphisme χ d'un groupe dans $\mathbb{T}$ s'appelle *caractère*; $\hat{\mathcal{G}}$ sera l'ensemble des *caractères continus* de $\mathcal{G}$. Il est clair que l'opération $\hat{Ad}$:

$$\hat{Ad}(g)(\chi) = \chi \circ Ad(g^{-1}) \quad \forall g \in G, \chi \in \hat{\mathcal{G}}$$

est une action de G sur $\hat{\mathcal{G}}$; on l'appelle *action co-adjointe*.

Si g appartient au centre de G , $Ad(g)$ et par conséquent $\hat{Ad}(g)$ se réduisent à l'identité : il s'agit donc de deux actions du quotient de G par son centre; dans le cas du groupe de Bargmann, il s'agira donc d'actions du *groupe de Galilée*.

(2.3.4) caractérisation du moment

Cela permet d'énoncer une réponse à la question posée en (2.3) : l'action *universelle* du groupe de Galilée sur le moment, c'est l'action *co-adjointe* du groupe de Bargmann; les 20 formules qui l'expriment se réduisent à :

$$\Phi(g)(\chi) = \hat{Ad}(g)(\chi) \quad \forall g \in G$$

si on identifie le *moment* χ avec un *caractère* de l'algèbre de Lie par la formule :

²⁰ Mais on peut se passer du *crochet de Lie*. Voir la note 52.

$$\chi(\mathcal{G}) = e^{\frac{i}{\hbar} \left[\langle \vec{l}, \vec{\omega} \rangle - \langle \vec{g}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{p}, \vec{\gamma} \rangle - E \varepsilon - m \phi \right]}$$

(notations 2.2.2 et 2.3.2); $\hbar$ désigne un facteur arbitraire ⁽²¹⁾.

(3) moins de classicisme

(3.1) du point matériel au photon

' nous disons chaud, nous disons froid, nous disons doux, nous disons amer, nous disons couleur, mais il n'existe en réalité que les atomes et le vide '

Lucrèce, De Natura Rerum

(3.1.1) point matériel et orbite coadjointe

Prenons le système le plus simple, constitué d'un seul point matériel libre. Dans ce cas tout mouvement x s'obtient par l'action du groupe G sur un mouvement x_0 arbitrairement choisi — par exemple le repos à l'origine; mouvement dont le moment $\chi_0 = J(x_0)$ vaut :

$$\left(\vec{l}, \vec{g}, \vec{p}, E, m \right) = \left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, 0, m_0 \right)$$

Alors l'application moment J est un difféomorphisme ⁽²²⁾ de l'espace des mouvements X sur l'ensemble des $\hat{Ad}(g)(\chi_0)$ — ensemble qu'on appelle orbite coadjointe de χ_0 .

deux petits sauts conceptuels

Il est permis d'identifier x et $J(x)$, donc l'espace des mouvements avec l'orbite coadjointe; par réduction existentielle de l'objet à l'ensemble de ses virtualités, on peut identifier le point

²¹ On obtient encore la même action si on ajoute, au second membre, une constante arbitraire à l'énergie E .

²² Application différentiable dont l'inverse est différentiable. La structure différentielle de l'orbite est celle qui fait de l'application $g \mapsto \hat{Ad}(g)(\chi)$ une *submersion* pour tout χ . Sa dimension est 6.

matériel à l'ensemble de ses mouvements, donc à l'orbite même.

(3.1.2) particules à spin

une mécanique encore plus universelle

L'intérêt de ce point de vue, c'est son utilisation inverse : ce sont les diverses orbites coadjointes qui vont devenir aptes à décrire des particules. Nous pouvons alors oublier les détails accessoires tels que conditions initiales, équations du mouvement, lignes d'univers, etc.

Ainsi l'orbite de :

$$\left(\vec{s}, \vec{0}, \vec{0}, 0, m_0 \right)$$

a la dimension 8 ; on peut l'interpréter comme une *particule à spin*, de masse m_0 , de spin $\vec{l}_s$.

(3.1.3) photon galiléen

Examinons une orbite de dimension 6, décrivant une *particule de masse nulle*; c'est celle du point:

$$x_0 = \left(\vec{s}, \vec{0}, \vec{k}, 0, 0 \right)$$

$\vec{s}$ et $\vec{k}$ étant des vecteurs parallèles.

Cette orbite est caractérisée par les trois nombres $s = \|\vec{s}\|$ (le spin), $k = \|\vec{k}\|$ (la couleur),

$\chi = \frac{\langle \vec{s}, \vec{k} \rangle}{sk} = \pm 1$ (l'hélicité). On peut les choisir pour que cette orbite soit un *photon vert polarisé à gauche* ⁽²³⁾.

Dans le mouvement particulier x_0 , le photon passe à l'origine à la date nulle, ce qui ne l'empêche pas d'avoir un moment cinétique "propre" égal à $\vec{s}$; sa vitesse est infinie, ce qui ne l'empêche pas d'avoir une énergie nulle et une impulsion finie égale à $\vec{k}$.

²³ Dans le cas du photon, le spin vaut 1 ; s'il est polarisé à gauche, l'hélicité vaut -1 (avec une orientation standard de l'espace); la couleur $\frac{2\pi}{0.53 \text{ micromètre}}$ est verte; ces valeurs sont données en prenant la valeur standard de $\hbar$ (voir 5.2.3). Voir J.M. SOURIAU, Structure des Systèmes Dynamiques, Dunod Ed. (1969).

(3.2) analyse dimensionnelle

(3.2.1) normalisateur

Dans la construction (2.3.1) du groupe de Bargmann, nous avons supposé choisi un référentiel initial, identifiant l'espace-temps E_4 à l'espace numérique $\mathbb{R}^4$, E_5 à l'espace numérique $\mathbb{R}^5$. Quels sont les référentiels équivalents de E_5 , en ce sens qu'ils associent le même groupe de Bargmann actif au groupe passif G ? Si nous admettons a priori la structure différentielle de E_5 , les référentiels équivalents seront indexés par les éléments du normalisateur de G (24) dans le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{R}^5$.

A priori, ce normalisateur contient G ; le calcul montre que c'est un groupe de dimension 14, produit semi-direct de G par un groupe G_+ de dimension 3. On peut cartographier ce supplément G_+ par un paramètre additif K et deux paramètres multiplicatifs L , T , et l'engendrer par les substitutions :

$$(u, \vec{r}, t) \rightarrow (u + Kt, \vec{r}, t)$$

et

$$(u, \vec{r}, t) \rightarrow (L^2 T^{-1} u, L\vec{r}, Tt)$$

(3.2.2) équations aux dimensions

Puisque G_+ agit sur G par automorphismes, il agit aussi par automorphismes sur l'algèbre de Lie (voir 2.3.2) et sur son dual, donc sur le moment. L'action du générateur K sur le moment ajoute une constante arbitraire à l'énergie; l'action des dilatations L et T conduit aux "équations aux dimensions": on les obtient sous leur forme traditionnelle :

$$\begin{aligned} & \left(\vec{l}, \vec{g}, \vec{p}, E, m \right) \\ & \downarrow \\ & \left(ML^2 T^{-1} \vec{l}, ML \vec{g}, ML T^{-1} \vec{p}, ML^2 T^{-2} E, Mm \right) \end{aligned}$$

à condition d'opérer simultanément sur la variable $\hbar$ (2.3.3) une substitution $\hbar \rightarrow A \hbar$, et de poser $M = AT L^{-2}$; ce qui confère à $\hbar$ l'équation aux dimensions d'une action

²⁴ L'ensemble des transformations γ telles que $\gamma G \gamma^{-1} = G$.

$$A = ML^2 T^{-1} \quad (25).$$

(3.3) relativité restreinte et générale

Quelques remarques seulement : pour passer de la relativité galiléenne à la relativité restreinte, il suffit de modifier "un peu" la projection de E_5 sur E_4 , sans changer la métrique (voir 2.3.1) : au lieu de $P(u, \vec{r}, t) = (\vec{r}, t)$, on pose :

$$P(u, \vec{r}, t - \frac{u}{2c^2}) = (\vec{r}, t)$$

c désignant un "grand" nombre.

La construction géométrique (2.3.1) produit un nouveau groupe G , dont l'algèbre de Lie comporte un "petit" terme supplémentaire :

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & \text{scal}(\vec{\beta}) & 0 & \phi \\ 0 & \text{ext}(\vec{\omega}) & \vec{\beta} & \vec{\gamma} \\ 0 & \text{scal}(\vec{\beta})/c^2 & 0 & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l'exponentielle de matrice permet d'en déduire des éléments du groupe — en particulier les transformations de Lorentz, qui remplacent les transformations de Bruno.

La substitution $u \rightarrow u - c^2 t$ met la métrique de E_5 sous la forme :

$$ds^2 = d\vec{r}^2 - c^2 dt^2 + \frac{du^2}{c^2}$$

qui montre que G est le produit direct du groupe de Poincaré par un groupe de jauge. Les orbites coadjointes de ce groupe donnent des modèles relativistes (au sens d'Einstein) pour les particules; par exemple pour le photon, dont la couleur est variable (elle dépend du mouvement) et dont la vitesse est "grande", mais finie : elle vaut c (26).

²⁵ C'est cette procédure qui justifie l'apparition de mètres, kilogrammes et secondes dans le modèle galiléen de photon (3.1.3).

²⁶ Bien entendu l'analyse dimensionnelle précédente doit être révisée.

Enfin si on admet une perturbation "lisse" de la métrique de E_5 , on rejoint la théorie de KALUZA-KLEIN (1921), qui unifie les équations d'Einstein et de Maxwell.

(4) analyse fonctionnelle convexe

(4.1) enveloppes

Soit X un ensemble. Notons $\mathbb{C}^X$ l'ensemble des fonctions complexes sur X .

δ désignera la "fonction de Dirac" ou "valuation" (fig.5) :

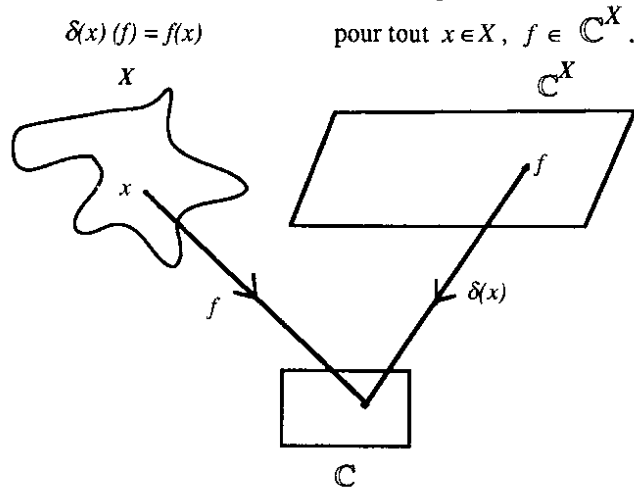


fig.5

Comment ajoute-t-on deux fonctions ? la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{C}^X$ est celle qui rend *linéaires* les $\delta(x)$.

Comment définit-on une limite de fonctions ? la topologie de $\mathbb{C}^X$ sera celle qui rend *continus* les $\delta(x)$; c'est la *topologie simple* ⁽²⁷⁾.

Nous pouvons donc reconnaître, dans $\mathbb{C}^X$, les parties *convexes*, les parties *fermées*; nous

²⁷ La "moins fine" de ces topologies. Elle s'appelle aussi *topologie de Tychonov*, *topologie de la convergence uniforme sur toute partie finie*.

appellerons *enveloppe* toute partie à la fois convexe et fermée. Toute intersection d'enveloppes est une enveloppe; pour toute partie Γ de $\mathbb{C}^X$, il existe donc une plus petite enveloppe contenant Γ : appelons-la *enveloppe de Γ* .

(4.2) matrices

(4.2.1) définition

Classiquement, une *matrice carrée* M , de format n , c'est un tableau de nombres complexes à double entrée, autrement dit une fonction sur l'espace des couples d'indices :

$$M: X \times X \rightarrow \mathbb{C} \quad X = [1 \dots n]$$

Généralisons : pour tout ensemble X , une *matrice de format X* , ce sera une fonction $X \times X \rightarrow \mathbb{C}$.

Diverses notions classiques s'étendent immédiatement à ces "matrices infinies" : *diagonale*, *lignes*, *colonnes* par exemple ⁽²⁸⁾. Mais pas la multiplication matricielle : on s'en passera.

(4.2.2) symétries

Image réciproque

Soit M une matrice de format X , X' un ensemble, a une application $X' \rightarrow X$. L'écriture :

$$[a^*M](x', y') = M(a(x'), a(y'))$$

définit une matrice a^*M de format X' . On l'appellera *image réciproque* de M par a ; a^* est une application *linéaire* et *continue* (pour la topologie simple); nous allons ordonner les matrices (voir 4.2.3), et a^* sera alors *croissante*.

automorphismes

Les *symétries* (ou *automorphismes*) d'une matrice M , ce seront les permutations a de son format telles que $a^*M = M$; elles constituent un groupe $\text{aut}(M)$ ⁽²⁹⁾.

²⁸ Précisons: la *colonne numéro x* de M est la fonction $y \mapsto M(y, x)$.

²⁹ Un *morphisme de matrice* $M \rightarrow M'$, c'est une application $a: \text{format}(M) \rightarrow \text{format}(M')$ telle que $M = a^*M'$; on définit ainsi une *catégorie des matrices*. D'où la syntaxe des mots *automorphisme*, *isomorphisme*.

exemple

Soit Π la matrice de format $\mathbb{C}$:

$$\Pi(z, z') = z \overline{z'}$$

Le groupe $\text{aut}(\Pi)$, c'est le tore $\mathbb{T}$ (2.3.3), agissant multiplicativement sur $\mathbb{C}$.

(4.2.3) un peu d'ordre chez les matrices

Utilisons cette matrice Π . Pour tout ensemble X , toute fonction complexe f sur X , l'image réciproque $f^* \Pi$ est une matrice de format X , qu'on appellera *dyade* de f ; les *dyades de format* X ont une *enveloppe*, que nous noterons $\text{Pos}(X)$.

La relation $\geq$:

$$M \geq M' \Leftrightarrow M - M' \in \text{Pos}(X)$$

ordonne les matrices de format X ; les éléments de $\text{Pos}(X)$ s'appelleront donc matrices *positives* ⁽³⁰⁾.

(4.3) analyse harmonique**(4.3.1) espace de Hilbert d'une matrice positive**

Soit P une matrice positive de format X , donc un point du convexe $\text{Pos}(X)$. Ce convexe possède des *faces* ⁽³¹⁾; désignons par *face*(P) la plus petite face contenant P , et par $\mathcal{H}(P)$ l'ensemble des fonctions ψ telles que :

$$\text{dyade}(\psi) \in \text{face}(P)$$

³⁰ Pour qu'une matrice P soit positive, il faut et il suffit que toutes les sommes finies:

$$\sum_{j,k} \overline{C_j} C_k P(x_j, x_k) \quad (C_k \in \mathbb{C}, x_k \in X)$$

soient ≥ 0 . Alors P est *hermitienne*: $P(y, x) = \overline{P(x, y)}$.

³¹ Une *face* d'un convexe E , c'est une partie convexe F de E telle que:

$$e \in E, e' \in E, \frac{e+e'}{2} \in F \Rightarrow e \in F, e' \in F;$$

les *points extrémaux* sont les faces réduites à un point. Une face d'une face de E est une face de E ; toute intersection de faces de E est une face de E . Si $x \in E$, nous notons *face*(x) la plus petite face de E contenant x . Ici *face*(P) est l'ensemble des matrices Q vérifiant $0 \leq Q \leq rP$, r réel.

Cette propriété peut s'écrire:

$$\psi^* \Pi \leq r \Pi \quad (r \text{ réel})$$

ce qui permet de poser:

$$\|\psi\| = \inf \sqrt{r} \quad \forall \psi \in \mathcal{H}(P);$$

alors :

- i) $\mathcal{H}(P)$ est un espace vectoriel complexe, normé, complet.
- ii) Les *colonnes* de P appartiennent à $\mathcal{H}(P)$; leurs combinaisons linéaires sont denses (en norme) dans $\mathcal{H}(P)$.
- iii) $\mathcal{H}(P)$ est un *espace de Hilbert*: il possède un produit scalaire $\langle, \rangle$ hermitien, linéaire à droite, défini par $\langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 \quad \forall \psi$ ⁽³²⁾.

réciproque, définition

Tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ se construit ainsi; en effet le *produit scalaire* S dans $\mathcal{H}$:

$$S(\phi, \psi) = \langle \phi, \psi \rangle$$

est une matrice positive de format $\mathcal{H}$; l'application "colonne" identifie les espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}(S)$.

Le *groupe unitaire* de $\mathcal{H}$ se définit comme le groupe $\text{aut}(S)$ des automorphismes de la matrice S .

exemple

Soient $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ des espaces de Hilbert. Sur leur produit cartésien, la matrice P :

$$P((\psi_1, \dots, \psi_n), (\psi'_1, \dots, \psi'_n)) = \langle \psi_1, \psi'_1 \rangle \dots \langle \psi_n, \psi'_n \rangle$$

est positive; le *produit tensoriel* des $\mathcal{H}_j$ se définit comme l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(P)$; la colonne dans P de $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ se note $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n$; c'est un élément du produit tensoriel qui dépend linéairement de chacun des ψ_j .

³² Si $\hat{x}$ désigne la colonne x de P , on a: $\psi(x) = \langle \hat{x}, \psi \rangle$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}(P)$ (propriété du

"noyau reproduisant"); et en particulier: $P(x, y) = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$. La construction de $\mathcal{H}(P)$ à partir des colonnes apparaît dans N. ARONSZAJN, Trans. A.M.S., 68 337-404 (1950) et déjà dans E.H. MOORE, Bull. A.M.S., 23, 59, 66-67 (1916); sa définition par une inégalité apparaît dans L.SCHWARTZ, Séminaire Bourbaki 238, 1-18 (1962).

(4.3.2) représentation unitaire des symétries

Soit P une matrice positive. Posons, $\forall a \in \text{aut}(P)$, $\psi \in \mathcal{H}(P)$:

$$R(a)(\psi) = \psi \circ a^{-1}$$

alors R est évidemment un morphisme de groupe : $[\text{aut}(P)] \rightarrow [\text{groupe unitaire de } \mathcal{H}(P)]$; ce qu'on appelle une *représentation unitaire* de $\text{aut}(P)$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(P)$.

(4.3.3) états d'un groupe

définition

Nous appellerons *états* d'un groupe G les matrices P , de format G , vérifiant les conditions suivantes :

$$P \geq 0$$

$$P(e, e) = 1$$

P est invariante à gauche,

cette dernière condition signifiant que les translations à gauche sont des symétries de P .

représentation engendrée

Par construction, G est un sous-groupe de $\text{aut}(P)$; d'où une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}(P)$, que nous dirons *engendrée* par l'état P ⁽³³⁾.

quelques propriétés des états

On peut caractériser un état P par un objet moins redondant, la ligne p de l'élément neutre dans la matrice P . En effet, à cause de l'invariance à gauche, P s'exprime en fonction de $p : P(g, g') = p(g^{-1}g')$. Nous appellerons aussi "*états*" ces fonctions ⁽³⁴⁾.

Alors :

- i) L'ensemble $st(G)$ des états d'un groupe G est une *enveloppe compacte*.

³³ C'est la restriction à G de la représentation R de $\text{aut}(P)$ sur $\mathcal{H}(P)$; elle s'écrit donc:

$$U(g)(\psi)(g') = \psi(g^{-1}g').$$

On reconnaît la variante de GODEMENT de la construction GELFAND-NAIMARK-SEGAL. Voir I.M. GELFAND, D.A. RAIKOV, Mat.Sb. 13 301-316 (1943), R. GODEMENT, Trans. Am. S. 63, 1-84 (1948).

³⁴ Une fonction $p : G \rightarrow \mathbb{C}$ est un état ssi:

$$0 \leq \sum_{j,k} \overline{C_j} C_k p(g_j^{-1} g_k) \quad \text{pour tout choix fini } C_k \in \mathbb{C}, g_k \in G$$

- ii) Si p est un état, $p(g^{-1}) = \overline{p(g)}$, $|p(g)| \leq 1$ pour tout $g \in G$.

- iii) Si p est un état, $|p(g')| = 1$ définit un sous-groupe G' ; alors :

$$p(gg') = p(g)p(g') \quad \forall g \in G, g' \in G'.$$

- iv) Un état d'un sous-groupe de G , prolongé par 0 à l'extérieur, est un état de G .

- v) La composée $p \circ M$ d'un état et d'un morphisme de groupe est un état.

- vi) Soit p un état, U la représentation engendrée. Alors il existe dans l'espace de Hilbert un vecteur ψ , normé, tel que :

$$p(g) = \langle \psi, U(g)(\psi) \rangle \quad \text{pour tout } g \text{ }^{(35)}.$$

(4.3.4) représentations irréductibles

Réciproquement, donnons nous un groupe G , une représentation unitaire V de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$; et un vecteur normé ψ dans $\mathcal{H}$. La fonction p :

$$p(g) = \langle \psi, V(g)(\psi) \rangle$$

est un état de G (on dit que ψ est *vecteur d'état* de p).

On dit que:

- le vecteur ψ est *cyclique* pour V si la représentation engendrée par p est *équivalente* à V ⁽³⁶⁾;
- la représentation V est *irréductible* si tous les vecteurs normés de $\mathcal{H}$ sont cycliques.

théorème

- i) Soit p un état de G . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :
- { la représentation engendrée par p est irréductible
 - { p est un point *extrémal* dans le convexe des états (voir la note 31)

nous dirons alors que p est un *état irréductible*.

- ii) Soit V une représentation irréductible de G , ψ et ψ' deux vecteurs nor-

³⁵ On peut choisir la colonne de l'élément neutre dans la matrice P , encore égale à la conjuguée de la fonction p .

³⁶ Deux représentations unitaires V_1 et V_2 d'un groupe G dans $\text{aut}(S_1)$, $\text{aut}(S_2)$ sont dites *équivalentes* s'il existe $A \in \text{iso}(S_1, S_2)$ qui les entrelace : $A \circ V_1(g) = V_2(g) \circ A$ pour tout $g \in G$.

Pour qu'un vecteur ψ soit cyclique, il faut et il suffit que l'espace vectoriel engendré par les $V(g)(\psi)$ soit dense (en norme) dans $\mathcal{H}$.

més. Si les états associés à ψ et ψ' sont égaux, ψ et ψ' sont *parallèles* :

$$\psi' = C \psi \quad (37).$$

ocarina

Ainsi, dans le convexe $st(G)$ des états de G , les points extrémaux se répartissent en classes d'équivalence (équivalence des représentations engendrées), qui sont chacune un *projectif hilbertien*. $st(G)$ étant compact, le théorème de Krein-Milman indique que $st(G)$ est l'enveloppe de toutes ces classes (fig 6).

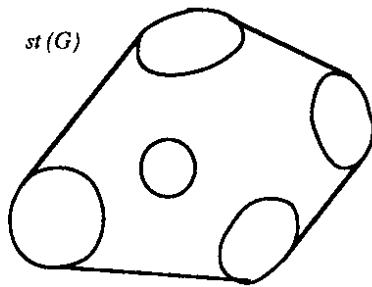


fig. 6

exemple

Soit χ un *caractère* d'un groupe G (38); χ est une représentation irréductible (39); un seul état appartient à cette représentation, il est égal à χ .

(4.3.5) cas commutatif

Si un groupe G est *commutatif*, les états irréductibles sont les caractères, leurs classes d'équivalence sont donc réduites à des points.

Supposons en plus G *topologique et localement compact*; alors tout caractère est limite simple de caractères continus; par conséquent l'ensemble $\hat{G}$ de ces caractères continus a pour enveloppe l'ensemble $st(G)$ de tous les états de G (40). $\hat{G}$ est évidemment un groupe multiplicatif, appelé *groupe dual* de G (41).

37 C est un complexe de module 1; ψ et ψ' sont "égaux à une phase près".

38 Définition (2.3.3).

39 Sur l'espace de Hilbert $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire Π ; voir (4.2.2).

40 Voir F. ZIEGLER, Quantum states on coadjoint orbits, Preprint C.P.T. Marseille 2365 (1990).

41 Réciproquement, les éléments de G constituent des caractères de $\tilde{G}$; la topologie qui les rend continus fait aussi de $\tilde{G}$ un groupe localement compact, et fait de G le dual de $\tilde{G}$ (PONTRJAGIN, 1934). Nous avons rencontré un exemple en mécanique (2.3.3).

(4.4) probabilités

(4.4.1) probabilisation

Soit X un ensemble. Nous appellerons *probabilisation* de X le choix d'une partie Γ de $\mathbb{C}^X$ (fig.7).

Pour tout $x \in X$, notons $\delta_{\Gamma}(x)$ la fonction de Dirac restreinte à Γ :

$$\delta_{\Gamma}(x)(\gamma) = \gamma(x) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

L'enveloppe des $\delta_{\Gamma}(x)$ (dans $\mathbb{C}^{\Gamma}$) se notera $prob(\Gamma)$; si $p \in prob(\Gamma)$ et si $\gamma \in \Gamma$, le nombre $p(\gamma)$ s'interprétera comme *valeur moyenne* (ou *espérance mathématique*) de γ pour la Γ -loi de probabilité p (42).

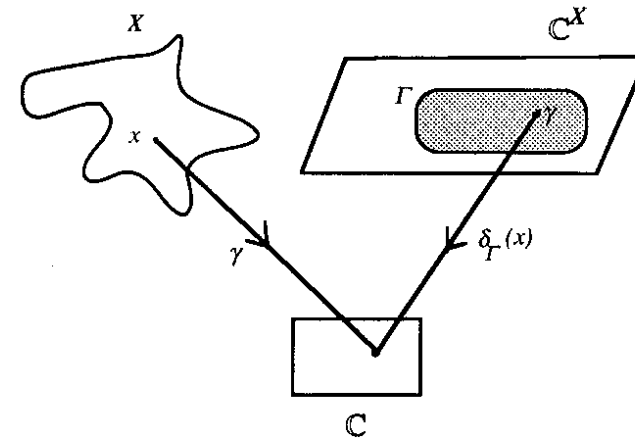


fig.7

exemple

X est un espace topologique compact; Γ l'ensemble des fonctions continues sur X . Alors $prob(\Gamma)$ est constitué des *mesures de probabilité* sur X , au sens classique du terme (43).

42 Le nombre $p(\gamma)$ appartient à l'enveloppe des valeurs de γ .

43 C'est-à-dire les formes linéaires positives sur Γ (qui est ici un espace vectoriel) prenant la valeur 1 pour la fonction unité.

(4.4.2) probabilisation par le tore

théorème

Soit X un ensemble; Γ un ensemble de fonctions réelles ou complexes sur X vérifiant les trois conditions suivantes :

- I) chaque fonction de Γ est bornée;
- II) Γ est close pour la conjugaison complexe et pour la multiplication;
- III) Γ contient la fonction unité 1 .

Notons A l'ensemble des limites uniformes de combinaisons linéaires de fonctions prises dans Γ . Alors :

- i) Pour qu'une fonction définie sur Γ soit une Γ -loi ⁽⁴⁴⁾, il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable par une A -loi, qui est alors unique.
- ii) Les A -lois sont les formes linéaires positives de masse 1 sur A .
- iii) l'enveloppe $prob(\Gamma)$ est compacte; l'ensemble X_Γ de ses points extrémaux est la fermeture de $\delta_\Gamma(X)$.
- iv) A est l'algèbre des $\phi \circ \delta_\Gamma$ (ϕ : fonction continue sur le compact X_Γ) ⁽⁴⁵⁾.

Ces propriétés autorisent l'emploi de la notation intégrale :

$$p(a) = \int_X a(x) dp(x) \quad \forall a \in A, p \in prob(\Gamma)$$

exemple

Soit X un ensemble; identifions chaque partie de X avec sa fonction caractéristique. On

⁴⁴ Des conditions nécessaires et suffisantes:

$$0 \leq \sum_{j,k} \overline{c_j} c_k p(\gamma_j \gamma_k) \leq \sup_{x \in X} \left| \sum_k c_k \gamma_k(x) \right|^2 \quad \text{pour tout choix } C_k \in \mathbb{C}, \gamma_k \in \Gamma$$

⁴⁵ A est une C^* -algèbre unitaire de fonctions bornées; le théorème énoncé est une conséquence de la théorie de Gelfand-Naimark des C^* -algèbres commutatives.

choisit un ensemble Γ de parties, clos pour l'intersection finie, et contenant X .

Il est clair que les parties de X qui sont (comme fonctions) des éléments de A constituent un clan $\mathcal{A}$ contenant Γ ; le prolongement sur $\mathcal{A}$ d'une Γ -loi p est une fonction additive d'ensemble; on sait donc prolonger canoniquement p à la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par $\mathcal{A}$, par une fonction dénombrablement additive.

utilisation probabiliste du tore

Soit X un ensemble quelconque. Choisissons pour Γ un groupe de fonctions à valeurs dans le tore $\mathbb{T}$.

Appliquons le théorème (4.4.2). Il est clair que chaque $\delta_\Gamma(x)$ est un caractère du groupe commutatif Γ , donc un état extrémal (fig. 8). Par définition, $prob(\Gamma)$ est la plus petite enveloppe contenant $\delta_\Gamma(X)$; elle est donc contenue dans l'enveloppe $st(\Gamma)$ ⁽⁴⁶⁾; plus précisément, c'est une face de $st(\Gamma)$ (voir la note 31).

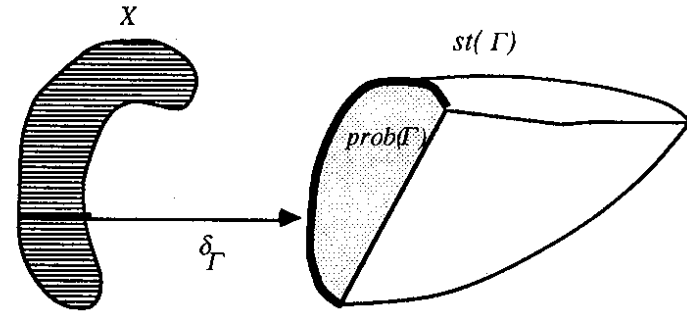


fig.8

(4.4.3) spectres

Posons :

$$\mathcal{F}(x)(y) = e^{i \langle x, y \rangle} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

le crochet $\langle \dots \rangle$ désignant le produit scalaire euclidien. Alors $\mathcal{F}$ est un isomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}^n$ avec son dual.

Probabilisons $\mathbb{R}^n$ par ce dual Γ , et appelons *spectres* les lois de probabilité correspon-

⁴⁶ $prob(\Gamma)$ est l'ensemble des états p qui vérifient les inégalités:

$$\left| \sum_k C_k p(\gamma_k) \right| \leq \sup_{x \in X} \left| \sum_k C_k \gamma_k(x) \right|$$

dantes.

Dans ce cas particulier, $\text{prob}(\Gamma)$ est égal à $\text{st}(\Gamma)$, tous les états de Γ sont des spectres (Cf.4.3.5). Par conséquent la transformation de Fourier $p = s \circ \mathcal{F}$:

$$p(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} ds(y)$$

est une bijection entre les spectres s et les états p ; les mesures de probabilité classiques, ce sont les spectres dont la transformée de Fourier est continue (BOCHNER, 1932) (47).

Soit $\mathcal{R}$ un réseau dans $\mathbb{R}^n$ (un sous-groupe additif fermé). Nous dirons qu'un spectre s est supporté par $\mathcal{R}$ si l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x) ds(x) \quad a \in A \quad (48)$$

ne dépend que des valeurs de a sur le réseau $\mathcal{R}$ (49); condition équivalente : la transformée de Fourier $s \circ \mathcal{F}$ prend la valeur 1 sur le réseau dual $\hat{\mathcal{R}} = \ker(\mathcal{H}(\mathcal{R}))$.

exemple

La fonction p qui vaut 1 sur $\hat{\mathcal{R}}$, 0 ailleurs, est un état (voir 4.3.3); $s = p \circ \mathcal{F}^{-1}$ est donc un spectre supporté par $\mathcal{R}$. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} a(x) ds(x)$ s'interprète comme "valeur moyenne" de la fonction a sur $\mathcal{R}$; le spectre s est "équiparti" sur le réseau.

(4.4.4) observables

Revenons au cas d'un ensemble X quelconque, probabilisé par un sous-groupe quelconque Γ de $\mathbb{T}^X$.

Considérons un "sous-groupe à un paramètre", engendré par un morphisme de groupe Φ :

$\mathbb{R} \rightarrow \Gamma$. Pour toute Γ -loi de probabilité p , $p \circ \Phi$ est un état de $\mathbb{R}$, transformé de Fourier d'un spectre s de $\mathbb{R}$.

Si Φ est continu (pour la topologie simple de Γ), Φ se met nécessairement sous la forme :

$$\Phi(r)(x) = e^{i r \theta(x)}.$$

Les fonctions $\theta : X \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi associées à un morphisme Φ constituent un espace vectoriel : nous les appellerons *observables* du groupe Γ . Le spectre s associé à θ par une Γ -loi p est donné par :

$$\int_X e^{i r \theta(x)} dp(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i r \tau} ds(\tau) \quad \forall r$$

Si θ est bornée, son spectre est une mesure de probabilité dont le support est contenu dans l'enveloppe de $\theta(X)$.

(5) quantification géométrique

(5.1) mécanique statistique

Revenons au cas d'un système dynamique : l'application $J : x \mapsto \chi$ associe à chaque mouvement $x \in X$ un moment χ , qui est un caractère de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (voir 2.3.4). Par conséquent, si on pose :

$$g_X(x) = J(x)(g) \quad \forall g \in \mathcal{G}, x \in X$$

l'ensemble $\mathcal{G}_X$ des g_X est un groupe multiplicatif de fonctions $X \rightarrow \mathbb{T}$, donc une *pro-babilisation* de l'espace des mouvements X .

Rencontre-t-on des $\mathcal{G}_X$ -lois ? Oui, en mécanique statistique classique : une fonction de distribution ρ , solution de l'équation de Liouville sur "l'espace de phases", peut s'inter-

47 Alors l'état $s \circ \mathcal{F}$ est la fonction caractéristique (au sens de Poincaré-Lévy) de la mesure de probabilité s .

48 L'algèbre A est constituée des fonctions continues presque-périodiques.

49 Dans le cas continu, cela signifie que le support de la mesure s est contenu dans $\mathcal{R}$.

préter par une $\mathfrak{g}_X$ -loi de probabilité p ⁽⁵⁰⁾.

Ces lois de probabilité sont des états du groupe $\mathfrak{g}_X$, canoniquement quotient de $\mathfrak{g}$; ce sont donc aussi des états de $\mathfrak{g}$.

(5.2) états quantiques

— Nous avons caractérisé la **mécanique classique** d'une particule par une *orbite coadjointe* X d'un certain groupe de Lie G ; les *mouvements* sont les points de cette orbite (voir 3.1).

— Les lois de probabilité de la **mécanique statistique** sont des *états du groupe commutatif* $\mathfrak{g}$, linéarisé de G ⁽⁵¹⁾.

— Le premier principe de la **mécanique quantique** sera de remplacer ces états de $\mathfrak{g}$ par des *états du groupe* G lui-même ⁽⁵²⁾. Quels états? la quantification géométrique doit pouvoir les relier à la mécanique classique — donc à l'orbite.

(5.2.1) définition des états quantiques

observations

Soit p un état d'un groupe de Lie G .

L'application exponentielle $\exp$ envoie l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans G . La fonction $p \circ \exp$, définie sur $\mathfrak{g}$, est-elle un état? C'est le cas si G est commutatif, parce que l'exponentielle est un morphisme; mais pas en général.

Considérons donc les sous-groupes *commutatifs* A de G ; appelons *observations* leurs

⁵⁰ Par la formule $p(\mathfrak{g}_X) = \frac{\int \mathfrak{g}_X(x) p(y) dA(y)}{\int p(y) dA(y)}$; x est le mouvement engendré par la condition ini-

tiale y ; dA est la *densité de Liouville*; cette expression est calculée sur l'espace de phases à une date donnée t , mais elle est indépendante de t , grâce au théorème de Liouville.

⁵¹ Ces lois constituent l'*enveloppe de l'orbite*. Voir (5.1).

⁵² Ce principe traduit les "conditions de quanta" de Dirac, ou les "relations de commutation" de Heisenberg (qui se formulent au niveau infinitésimal, et exigent donc des conditions supplémentaires pour pouvoir s'appliquer).

linéarisations $\mathfrak{a}$ ⁽⁵³⁾. Alors l'exponentielle correspondante, que nous noterons $\exp \mathfrak{a}$, est un morphisme de $\mathfrak{a}$ dans A , donc dans G ; par composition avec un état p de G , on obtient donc un état $p \circ \exp \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$.

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\exp \mathfrak{a}} A \longrightarrow G \xrightarrow{p} \mathbb{C}$$

probabilisation par l'observation

Soit X une orbite coadjointe; puisque une observation $\mathfrak{a}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{g}$, elle caractérise un sous-groupe $\mathfrak{a}_X$ de $\mathfrak{g}_X$ (notations 5.1), donc une *probabilisation* de l'orbite X . Ce qui donne son sens à l'énoncé suivant :

Un état p de G sera dit *quantique* pour l'orbite X si,
pour toute observation $\mathfrak{a}$:

$$p \circ \exp \mathfrak{a} \in \text{prob}(\mathfrak{a}_X) \quad (54)$$

(5.2.2) géométrie des états quantiques

représentations quantiques

Soit U une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous dirons que U est une *représentation quantique* pour l'orbite X si, pour tout vecteur normé $\psi \in \mathcal{H}$, l'état p :

$$p(g) = \langle \psi, U(g)(\psi) \rangle$$

est quantique pour X .

théorème

- i) Pour tout état quantique, la représentation engendrée (4.3.3) est quantique.
- ii) Dans le convexe $st(G)$ des états de G , les états quantiques pour X consti-

⁵³ En termes plus classiques: les sous-algèbres abéliennes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

⁵⁴ Condition équivalente:

$$\left| \sum_j C_j p(\exp(\mathfrak{a}_j)) \right| \leq \sup_{\chi \in X} \left| \sum_j C_j \chi(\mathfrak{a}_j) \right|$$

pour tout choix fini des $C_j \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{a}_j \in \mathfrak{a}$. Voir J.M. Souriau, Ed. Hermann, "Travaux en cours" 32, 141-193 (1988).

tuent une *face compacte* $st_X(G)$.

Grâce au théorème de Krein-Milman, $st_X(G)$ est égal à l'enveloppe de ses points extrémaux. Parce que $st_X(G)$ est une face de $st(G)$, ces points extrémaux sont extrémaux dans $st(G)$; la représentation engendrée par chacun d'eux est donc *quantique* et *irréductible*; ces points extrémaux se répartissent donc en *projectifs hilbertiens* (voir 4.3.4 et la fig. 6).

observables

Soit g un élément de l'algèbre de Lie de G . Il existe des observations $\mathbf{a}$ qui contiennent g ⁽⁵⁵⁾; pour la probabilisation $\mathbf{a}_X$ associée, g définit (au sens 4.4.4) une *observable* θ sur l'orbite X :

$$x(g_r) = e^{ir\theta(x)} \quad \forall x \in X, r \in \mathbb{R};$$

visiblement indépendante de $\mathbf{a}$ (voir 4.4.4); pour tout état quantique p , la loi de probabilité $p \circ \exp \mathbf{a}$ définit le *spectre* s de l'observable θ ; il est donné par:

$$p(\exp(g_r)) = \int_{\mathbb{R}} e^{ir\tau} ds(\tau) \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

et par conséquent indépendant du choix de $\mathbf{a}$.

Si l'observable θ est une fonction *bornée*, ce spectre est une mesure de probabilité classique, et cette loi est supportée par l'intervalle fermé enveloppe de $\theta(X)$.

Supposons l'état p *continu*; désignons par U la représentation quantique engendrée. Alors le théorème de STONE implique l'existence et l'unicité d'un *opérateur self-adjoint* Θ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(p)$, tel que:

$$U(g_r) = e^{ir\Theta} \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

On peut si l'on veut utiliser cet *observable quantique* Θ pour exprimer le spectre s de l'*observable classique* θ :

$$\left\langle \psi, e^{ir\Theta}(\psi) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ir\tau} ds(\tau) \quad (\text{notation 4.3.3})$$

ψ désignant le vecteur d'état associé à p . D'où la formule:

$$\langle \psi, \Theta \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau ds(\tau)$$

qui exprime la *valeur moyenne* de l'observable θ dans l'état p — si elle existe. Etc.

(5.2.3) mécanique quantique galiléenne

Récapitulons: soit X une orbite du groupe de Bargmann G , espace des mouvements d'une particule; p un état quantique pour X .

Utilisons les résultats et les notations (2.3): un mouvement de la particule s'écrira:

$$x = \left(\vec{l}, \vec{g}, \vec{p}, E, m \right);$$

nous noterons en abrégé:

$$g = \left[\vec{\omega}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \varepsilon, \phi \right]$$

l'élément (2.3.2) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Alors, pour toute observation $\mathbf{a}$, l'état p définit une $\mathbf{a}_X$ -loi de probabilité $p_{\mathbf{a}} = p \circ \exp \mathbf{a}$ sur l'espace des mouvements X ; ce qui se détaille en:

$$\boxed{\begin{aligned} p(\exp(g)) &= \\ \int_X e^{\frac{i}{\hbar} \left[\langle \vec{l}, \vec{\omega} \rangle - \langle \vec{g}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{p}, \vec{\gamma} \rangle - E\varepsilon - m\phi \right]} dp_{\mathbf{a}}(x) \\ \forall g \in \mathfrak{a} \end{aligned}}$$

c'est cette formule qui permet en principe d'interpréter l'état.

Loi de Planck

Choisissons dans l'algèbre de Lie $g = \left[\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, 1, 0 \right]$; alors $A_t = \exp(gt)$ est une translation temporelle; l'observable associé à g est l'énergie, au facteur près $-\frac{1}{\hbar}$; dans un état quantique p où le spectre de l'énergie est concentré sur une valeur E , on a $p(A_t) = e^{-2i\pi\nu t}$, avec $\nu = \frac{E}{2\pi\hbar}$. Il en résulte (voir 4.3.3 iii):

$$p(g A_t) = p(A_t g) = p(g) e^{-2i\pi\nu t} \quad \forall g \in \mathfrak{g}, t \in \mathbb{R}$$

⁵⁵ Au moins une observation *maximale*.

p est donc un "état stationnaire" de fréquence ν ; on reconnaît la loi de Planck :

$$E = h\nu \quad (h = \text{constante de Planck})$$

à condition d'attribuer à la constante h , qui était jusqu'ici arbitraire, la valeur :

$$h = \frac{h}{2\pi} = 1.05459 \dots \times 10^{-34} \text{ kilogramme mètre}^2 \text{ seconde}^{-1}$$

règle de Bohr

Choisissons le groupe commutatif A des rotations autour d'un vecteur $\vec{\omega}$ ($\|\vec{\omega}\|=1$).

L'observation correspondante $\mathbf{a}$ est constituée des multiples réels de :

$$\mathcal{G} = [\vec{\omega}, \vec{0}, \vec{0}, 0, 0]$$

L'observable associée est, au facteur près $\frac{1}{h}$, la projection $\langle \vec{l}, \vec{\omega} \rangle$ du moment cinétique $\vec{l}$ sur la direction $\vec{\omega}$.

Pour tout état quantique p , le spectre correspondant s est donné par :

$$p(\exp(\mathcal{G} h r)) = \int_X e^{i r \langle \vec{l}, \vec{\omega} \rangle} dp_{\mathbf{a}}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i r y} ds(y) \quad \forall r$$

Un tour complet ramène au point de départ : donc $p(\exp(\mathcal{G} h r)) = 1$ si r appartient au réseau des multiples de $\frac{2\pi}{h}$. Par conséquent le réseau dual, celui des multiples de h , supporte le spectre s de toute projection du moment cinétique (voir 4.4.3) : on reconnaît la règle de Bohr.

caractérisation des états quantiques

Choisissons l'observation associée au groupe de jauge (2.3.1); l'observable associée est la masse m , dont la valeur est constante; la même règle donne la valeur d'un état quantique p sur ce groupe de jauge :

$$p \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -hr \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = e^{irm} \quad \forall r$$

Réciproquement, F. ZIEGLER⁽⁵⁶⁾ a démontré que tout état p du groupe de Bargmann qui vérifie cette condition est quantique pour le point matériel de masse m .

Ce qui implique l'existence d'un état quantique p au moins : on définit p par cette formule à l'intérieur du groupe de jauge, et on le prend nul à l'extérieur (voir 4.3.3). Le spectre de la position $\vec{r}$ est équiparti dans l'espace à tout instant; le spectre de chaque coordonnée du moment cinétique est équiparti sur le réseau des multiples de h .

(5.2.4) ondes

En 1926, ERWIN SCHRÖDINGER proposait de décrire le point matériel libre de masse m par une fonction d'onde ψ , fonction de classe C^∞ sur l'espace E_4 , solution de l'équation d'onde :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \Delta \psi \quad \left(\lambda = \frac{h}{m} \right)$$

et vérifiant, à une date t donnée, la condition de normalisation :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV(\vec{r}) = 1$$

dV désignant l'élément de volume. De telles fonctions existent⁽⁵⁷⁾; il résulte de l'équation d'onde qu'elles vérifient la condition de normalisation pour toute date t .

Associions à ψ la fonction Ψ définie sur l'espace E_5 par :

⁵⁶ F. ZIEGLER, Quantum representations of the Bargmann group, preprint C.P.T. Marseille 2250 (1989).

⁵⁷ Par exemple la fonction

$$\psi_a(\vec{r}, t) = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{3/4} (a - i \lambda t)^{-3/2} \exp \left(- \frac{\|\vec{r}\|^2}{2(a - i \lambda t)} \right)$$

a désignant une constante positive arbitraire (ayant l'équation aux dimensions L^2).

$$\Psi(u, \vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) e^{iu/\lambda}$$

Alors l'espace S de ces fonctions Ψ peut se définir comme l'ensemble des fonctions C^∞ sur l'espace E_5 , vérifiant les équations :

$$\Delta_5 \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{i}{\lambda} \Psi \quad (58)$$

et la condition de normalisation :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(u, \vec{r}, t)|^2 d\mathcal{V}(\vec{r}) = 1 \quad \forall u, t$$

Il est clair que la formule :

$$P(\Psi, \Psi') = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Psi(u, \vec{r}, t)} \Psi'(u, \vec{r}, t) d\mathcal{V}(\vec{r}) \quad \forall u, t$$

définit une matrice positive P de format S .

Soit g un élément du groupe de Bargmann G ; posons :

$$g(\Psi) = \Psi \circ g^{-1} \quad \forall \Psi \in S;$$

parce que g est une isométrie de E_5 commutant avec le groupe de jauge, on constate que $g(\Psi) \in S$; d'où une action de G sur S par automorphismes de la matrice positive P . Utilisons les procédures (4.3). Les fonctions ψ_a (note 57) permettent de montrer que l'application "colonne" associée à P est injective, et identifie donc l'espace fonctionnel S avec une partie de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(P)$ (59).

L'action du groupe de Bargmann G sur S se prolonge par une représentation unitaire U du groupe G sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(P)$. U est une représentation *irréductible*; le critère de Ziegler montre que l'assignation $\lambda = \frac{h}{m}$ dans l'équation de Schrödinger est précisément celle qui fait de U une *représentation quantique* pour le point matériel de masse m .

On peut dans ce cas construire effectivement les spectres et les opérateurs associés aux

observables (5.2.2); établir par exemple la *règle de Born* : dans l'état défini par $\Psi \in S$, le spectre de la position $\vec{r}$ à une date arbitraire t est égal à la mesure de probabilité :

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 d\mathcal{V}(\vec{r}).$$

(5.3) coexistence

Soit n un entier; étudions la mécanique associée au groupe produit G^n , G désignant le groupe de Bargmann.

G^n est constitué des multiplats :

$$g = (g_1, \dots, g_n)$$

et structuré pour que les projections $g \mapsto g_j$ soient des morphismes continus. Si $\mathcal{G}$ désigne le linéarisé de G , le linéarisé de G^n s'identifie à $\mathcal{G}^n$ par :

$$(g_1, \dots, g_n)(r) = (g_1(r), \dots, g_n(r)) \quad \forall r \in \mathbb{R};$$

par conséquent le dual $\hat{\mathcal{G}}^n$ s'identifie à $[\hat{\mathcal{G}}]^n$ par :

$$(\chi_1, \dots, \chi_n)(g_1, \dots, g_n) = \chi_1(g_1) \dots \chi_n(g_n)$$

et la représentation coadjointe est donnée par :

$$\hat{Ad}(g_1, \dots, g_n)(\chi_1, \dots, \chi_n) = (\hat{Ad}(g_1)(\chi_1), \dots, \hat{Ad}(g_n)(\chi_n)).$$

Une *orbite coadjointe* de G^n est donc un produit cartésien :

$$X_1 \times \dots \times X_n$$

d'orbites coadjointes de G , et peut être envisagé comme modèle de l'espace des mouvements d'un système de n particules libres.

Selon les règles de la mécanique classique (voir 2.1), l'action du groupe de Galilée sur un mouvement du système s'obtient par action sur chacun des mouvements individuels (c'est donc l'action de la *diagonale* de G^n , identifiée canoniquement à G), et le moment est la somme des moments individuels.

Il se trouve que cette coexistence pacifique est *compatible avec la quantification*. En effet, si $p_1 \dots p_n$ désignent des états de G , quantiques respectivement pour les orbites

⁵⁸ Δ_5 désigne le laplacien associé à la métrique de E_5 (2.3.1). Voir DUVAL et al., loc. cit. (note 16).

⁵⁹ S devient une partie dense de la sphère unité; le produit scalaire prolonge P .

$X_1 \dots X_n$, on peut montrer que la fonction p :

$$p(g_1, \dots, g_n) = p_1(g_1) \dots p_n(g_n)$$

est un *état* du groupe G^n et que p est *quantique* pour l'orbite coadjointe $X_1 \times \dots \times X_n$.

Tout état quantique de ce type est dit *séparable*; il assigne aux observables de la j -ième particule le même spectre que si elle existait seule dans l'état quantique p_j . Les spectres des observables globales (issues du sous-groupe diagonal) s'obtiennent par *convolution*: l'énergie du système est donc la "somme" des énergies individuelles, au sens de *l'addition des variables aléatoires*.

Mais puisque les états quantiques constituent un convexe, il existe évidemment des états quantiques *non séparables*.

Je remercie tous ceux qui ont discuté le contenu de ce travail, notamment Jérôme Chastenet de Géry, Christian Duval, Jimmy Elhadad, Patrick Iglesias, François Ziegler.
