

Milieux continus de dimension 1, 2 ou 3 : Statique et Dynamique

Jean-Marie Souriau

1991

STATIQUE

Dans la théorie classique des milieux continus, les tensions internes sont décrites par un objet géométrique T , le *tenseur des contraintes*, caractérisé par des composantes T^{jk} supposées symétriques : $T^{jk} = T^{kj}$. Six composantes indépendantes donc. L'équilibre du milieu s'exprime par les trois équations⁽¹⁾ :

$$\partial_j T^{jk} = 0. \quad (1)$$

Trois équations pour six inconnues : ce système est sous-déterminé, il doit être complété par des lois de comportement caractéristiques du milieu étudié.

Matière distribuée

Les coques, les fils, nous donnent l'image de milieux condensés sur une *sous-variété* (surface ou courbe). Comment étendre à ce cas la description précédente ?

Une réponse consiste à traiter l'objet mathématique T comme une *distribution*, fonctionnelle linéaire agissant sur une *variable d'essai* G . G n'a pas d'interprétation physique propre ; c'est un tenseur symétrique dont les composantes

$$G_{jk}$$

sont des fonctions indéfiniment différentiables des coordonnées, nulles au loin⁽²⁾.

Dans le cas d'un milieu tridimensionnel, on définira cette fonctionnelle T par la formule :

$$TG = \iiint \frac{1}{2} T^{jk} G_{jk} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (2)$$

Alors les équations d'équilibre (1) peuvent se traduire par la propriété suivante : TG est nul pour certains choix de G : ceux qui s'écrivent $G_{jk} = \partial_j Z_k + \partial_k Z_j$, les Z_j étant des fonctions d'essai

⁽¹⁾ L'écriture ∂_j désigne la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x^j}$; la sommation sur l'indice j , répété en position inférieure et supérieure, est sous-entendue.

⁽²⁾ Les « fonctions C^∞ à support compact » des analystes.

arbitraires⁽³⁾. Ceci suggère de définir une nouvelle opération D , qui associe à tout tenseur Z de composantes Z_j le tenseur $G = DZ$ dont les composantes sont :

$$[DZ]_{jk} = \partial_j Z_k + \partial_k Z_j \quad (3)$$

Les équations d'équilibre s'écrivent ainsi :

$$TDZ = 0 \text{ quel que soit le choix de } Z,$$

plus brièvement :

$$TD = 0. \quad (4)$$

Loi un peu plus complète que les simples équations $\partial_j T^{jk} = 0$: dans le cas où le milieu possède une surface libre, elle impose aussi sur cette surface la condition classique

$$T^{jk} N_k = 0 \quad (5)$$

N_k désignant la normale à la surface⁽⁴⁾.

Cette loi évoque évidemment le principe des travaux virtuels, Z jouant le rôle d'un « déplacement virtuel ». Mais avec quelques infractions aux habitudes classiques :

- Z apparaît comme un *déplacement de l'espace*, et non comme un déplacement du milieu ;
- Z est un vecteur *covariant*, ainsi que l'indiquent les indices inférieurs de ses composantes Z_j .

Fils

Étudions comment la matière peut être distribuée sur une courbe - décrite au moyen d'un paramètre arbitraire s . Cherchons a priori la distribution T de la matière sous la forme

$$TG = \int \frac{1}{2} T^{jk} G_{jk} ds \quad (6a)$$

- Que devient alors la loi d'équilibre $TD = 0$? Le résultat se décompose en deux étapes⁽⁵⁾ :
- il existe une fonction τ de s telle que

$$T^{jk} = \tau \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \quad (6b)$$

- le vecteur P :

$$P^j = \tau \frac{dx^j}{ds} \quad (6c)$$

est constant sur la courbe ; ce qui exige que cette courbe soit une droite — à moins que τ ne soit nul.

On obtient bien la description d'un fil tendu (ou détendu ...), et on voit apparaître une grandeur *conservée*, le vecteur P .

Ce vecteur est invariant par changement de variable croissant sur le paramètre s ; mais P change de signe si on inverse le sens de parcours. Ce qui donne un statut de pseudo-scalaire à la *tension* du fil.

⁽³⁾ Vérification : intégration par parties.

⁽⁴⁾ Application de la formule de Stokes.

⁽⁵⁾ La première s'obtient en écrivant la condition $TDZ = 0$ dans le cas des tenseurs Z qui se mettent sous la forme uZ' , u étant une fonction arbitraire qui s'annule sur la courbe.

Membranes

La même méthode permet de distribuer la matière sur une surface. On peut poser

$$TG = \iint \frac{1}{2} T^{jk} G_{jk} ds^1 ds^2 \quad (7a)$$

en choisissant des coordonnées s^1, s^2 sur cette surface⁽⁶⁾. La condition d'équilibre $TD = 0$ se formule encore en deux étapes :

- il existe des fonctions $\tau^{\alpha\beta}$ de s^1, s^2 ($\alpha, \beta = 1, 2, \tau^{\alpha\beta} = \tau^{\beta\alpha}$) telles que :

$$T^{jk} = \tau^{\alpha\beta} \frac{\partial x^j}{\partial s^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial s^\beta} \quad (7b)$$

- ces variables vérifient les trois équations suivantes⁽⁷⁾ :

$$\frac{\partial}{\partial s^\alpha} \left(\tau^{\alpha\beta} \frac{\partial x^j}{\partial s^\beta} \right) = 0. \quad (7c)$$

Coexistence, homogénéisation et assemblage

L'équation d'équilibre $TD = 0$ a la précieuse qualité d'être linéaire et continue (en T) : on peut ajouter des solutions, en prendre des limites.

Ainsi nous pouvons disposer dans un plan une infinité de fils parallèles équidistants, caractérisés chacun par une distribution rectiligne T_n ; la distribution $T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n$ existe⁽⁸⁾, elle décrit la *coexistence* de tous ces fils, et elle est solution de l'équation d'équilibre. En resserrant les fils et en diminuant proportionnellement leur tension, T aura une limite⁽⁹⁾, qui décrira une membrane plane tendue (dans le sens des fils, évidemment) : procédure d'homogénéisation. Variantes innombrables, du tissu au béton armé.

Une autre pratique consiste à ajouter des distributions qui ne sont pas individuellement en équilibre, mais dont la somme l'est : *assemblages*.

- Ainsi pour un assemblage de fils concourants, l'équation $TD = 0$ implique une nouvelle condition d'équilibre en chaque point de concours⁽¹⁰⁾ :

$$\sum P_n = 0, \quad (8)$$

la *composition des forces* est incluse dans la condition globale.

- Autre assemblage, à trois composantes : une membrane qui sépare un milieu en deux régions (l'intérieur et l'extérieur), par exemple une bulle de savon. La condition $TD = 0$ équilibre la tension de la membrane avec les contraintes des deux milieux.

⁽⁶⁾ Coordonnées quelconques, ici aussi bien que dans le cas des coques.

⁽⁷⁾ $j = 1, 2, 3$. L'écriture des équations 7a, b, c utilise la règle de sommation sur les indices α, β .

⁽⁸⁾ Il n'y a qu'un nombre fini de $T_n G$ qui ne soient pas nuls, puisque la variable d'essai G est à support compact.

⁽⁹⁾ Parce que TG aura une limite pour chaque choix de G .

⁽¹⁰⁾ Tous les fils orientés à partir du point de concours, ce qui fixe le sens des vecteurs P_n .

Second gradient

Choisissons une courbe C , et imaginons un disque plan mobile dont le centre parcourt C , en restant transversal à C , sans jamais se recouper. On peut toujours réduire son rayon en conservant ces propriétés.

Ce disque balaye un volume V qui peut contenir de la matière, qu'on suppose décrite par une distribution T . Si le rayon du disque est suffisamment petit (comme dans le cas d'une corde, d'une poutre, d'un ressort spiral ou d'un ressort à boudin), on peut approcher T par une distribution supportée par la courbe. Comment procéder ? pour calculer TG , en chaque point x de V , on remplacera G (qui est infiniment différentiable) par son développement au premier ordre autour du centre du disque qui passe par x . Alors l'intégrale triple dans V sera égale à une intégrale simple sur C , portant sur G et ses dérivées premières :

$$TG = \int \left[A^{jk} G_{jk} + B^{jkl} \partial_l G_{jk} \right] ds \quad (9)$$

Il est possible aussi de se donner a priori une intégrale de cette forme, dite de « second gradient »⁽¹¹⁾. L'équation d'équilibre $TD = 0$ se résout encore en deux étapes⁽¹²⁾ :

- Il existe des fonctions P^j, S^{kl} de s (avec $S^{kl} = -S^{lk}$) telles que

$$TG = \int \frac{dx^j}{ds} \left[P^k G_{jk} + S^{kl} \partial_l G_{jk} \right] ds \quad (10a)$$

- P^j, S^{kl} vérifient les 6 équations de conservation suivantes :

$$\begin{aligned} P^j &= C^{te} \\ S^{jk} + P^j x^k - P^k x^j &= C^{te} \end{aligned} \quad (10b)$$

Coques

La même méthode de balayage, appliquée à partir d'une surface, permet de décrire une *coque* par une intégrale du second gradient :

$$TG = \iint \left[A^{jk} G_{jk} + B^{jkl} \partial_l G_{jk} \right] ds^1 ds^2. \quad (11a)$$

La condition d'équilibre montre l'existence de nouvelles variables $P^{\alpha,k}$ et $S^{\alpha,kl}$ ⁽¹³⁾ telles que :

$$TG = \iint \frac{\partial x^j}{\partial s^\alpha} \left[P^{\alpha,k} G_{jk} + S^{\alpha,kl} \partial_l G_{jk} \right] ds^1 ds^2, \quad (11b)$$

et leur impose les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s^\alpha} \left[P^{\alpha,k} \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s^\alpha} \left[S^{\alpha,kl} + P^{\alpha,k} x^l - P^{\alpha,l} x^k \right] &= 0. \end{aligned} \quad (11c)$$

⁽¹¹⁾ Il est possible aussi de faire dans le disque un développement de G au second ordre, ce qui conduit à une intégrale de « troisième gradient ».

⁽¹²⁾ La première étape s'obtient en remplaçant Z par uvZ dans l'équation $TDZ = 0$, u et v étant deux fonctions définies dans l'espace, et nulles sur la courbe.

⁽¹³⁾ L'indice α prend les valeurs 1, 2 ; $S^{\alpha,lk} = -S^{\alpha,kl}$

Mais attention ! Les douze nouvelles variables ne sont pas complètement déterminées par la distribution T et par les coordonnées. On peut lever l'indétermination en choisissant sur la surface un champ de vecteurs transversal N (par exemple celui qui a servi à balayer le volume de la coque) et en imposant les deux conditions supplémentaires⁽¹⁴⁾

$$\delta_{jkl} N^j S^{\alpha,kl} = 0;$$

tous comptes faits, dix variables pour décrire en chaque point l'état de tension d'une coque en équilibre.

Dureté

Si pour décrire un milieu tridimensionnel on introduit des termes de second gradient, une intégration par partie les fait disparaître – en les transférant sur les bords. On obtient ainsi l'assemblage d'un premier gradient sur la surface limitant le milieu et d'un premier gradient à l'intérieur : le second gradient intérieur n'est que formel, il n'a pas de signification physique. Exemple : le phénomène de *capillarité*, la *tension superficielle* des liquides.

Un troisième gradient formel équivaut à un assemblage de premier gradient intérieur, de second gradient sur les faces, et de premier gradient sur les arêtes – susceptible de décrire la dureté d'un matériau.

DYNAMIQUE

Apparition de l'inertie

Comment passer à la dynamique ? D'abord, il faut tenir compte du temps, faire intervenir la variable t ; traitons-la comme quatrième coordonnée, notons-la x^4 . Il faut tout recommencer avec la dimension 4 : de nouveaux indices (λ, μ, \dots) prendront les valeurs 1, 2, 3, 4 ; l'opération D deviendra :

$$[DZ]_{\lambda\mu} = \partial_\lambda Z_\mu + \partial_\mu Z_\lambda \quad (12)$$

Présumons que l'équation

$$TD = 0 \quad (13)$$

passera ainsi du statut d'équation d'équilibre à celui d'*équation du mouvement*.

Pour cela, il faudra décrire la matière par une distribution *quadridimensionnelle* T .

Dans le cas d'un milieu continu, T sera donné par une intégrale quadruple

$$TG = \int \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} G_{\lambda\mu} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (14)$$

Les $T^{\lambda\mu}$ qui peuvent se découper en

$$\begin{pmatrix} T^{jk} & T^{j4} \\ T^{4k} & T^{44} \end{pmatrix}$$

⁽¹⁴⁾ δ_{jkl} désigne le symbole de Kronecker antisymétrique.

demandent une nouvelle interprétation.

On peut régler le compte des T^{j4} en les annulant par une *transformation de Galilée*

$$\begin{aligned} x^j &\rightarrow x^j + V^j t \\ t &\rightarrow t \end{aligned} \quad (15)$$

agissant de façon standard sur le tenseur $T^{\lambda\mu}$; cela définit un champ de vitesse V^j , que nous interpréterons comme *vitesse du milieu*. Notons Θ^{jk} le nouveau tenseur T^{jk} , et ρ la variable T^{44} .

La transformation réciproque met les $T^{\lambda\mu}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \Theta^{jk} + \rho V^j V^k & \rho V^j \\ \rho V^k & \rho \end{pmatrix}$$

et l'équation $TD = 0$ devient :

$$\begin{aligned} \partial_j \Theta^{jk} + \rho \left(V^j \partial_j V^k + \frac{\partial V^k}{\partial t} \right) &= 0 \\ \partial_j (\rho V^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

On reconnaît les *équations d'Euler des milieux continus* – si ρ est la masse spécifique et Θ la contrainte. Les *forces d'inertie*⁽¹⁵⁾ et la *conservation de la masse* sont apparues spontanément.

Bien entendu ces équations doivent être complétées par les diverses lois de comportement que proposent la mécanique des fluides, la théorie de l'élasticité et de la plasticité, la géophysique, la chimie, etc.

On peut aussi étudier les répartitions de matière sur des sous-variétés de l'espace-temps dont la dimension vaudra $d = 1, 2, 3$:

- $d = 3$: coques (ou membranes) en mouvement ;
- $d = 2$: cordes vibrantes, cordes cosmiques, etc. ;
- $d = 1$: mouvements des particules.

Dans tous ces cas, les méthodes développées en statique pour interpréter l'équation universelle $TD = 0$ peuvent se transposer.

Examinons seulement le *mouvement des particules* - transposé de l'équilibre des fils.

L'expression (6a) de la distribution de matière sur la ligne d'univers de la particule se transpose en

$$TG = \int \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} G_{\lambda\mu} ds \quad (17)$$

où on peut facultativement choisir le paramètre $s = t$.

Il apparaît un quadri-vecteur conservé P^λ tangent à la ligne d'univers, ce qui implique que le mouvement soit rectiligne et uniforme (principe de Galilée).

La règle (8) sur l'équilibre des fils concourants, transposée, produit les lois des collisions et des désintégrations ; lois de conservation de la somme des P^4 (qui s'interprètent comme *masses*) et des P^j (impulsions).

⁽¹⁵⁾ $\Gamma^k = V^j \partial_j V^k + \partial_t V^k$ est l'*accélération* des lignes de courant de la vitesse V .

La description classique des *particules à spin* est la transposition quadri-dimensionnelle du modèle (10a, 10b) des fils de torsion ; le *tenseur de spin* vaut S^{jk} ⁽¹⁶⁾. La loi $TD = 0$ fournit aussi les règles de collision et de désintégration de telles particules.

Mécanique statistique

Comme dans le cas de la statique, la linéarité en T de $TD = 0$ ⁽¹⁷⁾ permet de procéder à des effets de coexistence, d'homogénéisation et d'assemblage *dynamiques*.

Les collisions de particules étaient un exemple d'assemblage ; voici un exemple d'homogénéisation.

Considérons le modèle des particules de masse donnée m . L'espace des mouvements possibles est une variété de dimension 6⁽¹⁸⁾. Si on désigne par u l'un de ces mouvements, il lui correspond une distributions T_u (17).

Considérons maintenant une mesure positive μ sur cette variété. Elle permet de définir une coexistence

$$T = \int T_u d\mu(u) \quad (18)$$

définie précisément par :

$$TG = \int T_u G d\mu(u)$$

coexistence qui est une homogénéisation si la mesure μ est continue. En choisissant pour μ la mesure de Gibbs à une température donnée⁽¹⁹⁾, on obtient le modèle du *gaz parfait* où apparaissent la pression et la masse spécifique classiques.

Par une nouvelle coexistence, on peut décrire un *mélange gazeux*, faire apparaître les *pressions partielles* de chaque composante, ... etc.

Lois de conservation

Considérons une distribution de matière T occupant à chaque instant une région bornée de l'espace, et choisissons une fonction du temps u , nulle pour $t < t_0$, égale à 1 pour $t > t_1$.

On constate que l'équation $DZ = 0$ admet les solutions suivantes :

$$Z_\lambda = A_\lambda + B_{\lambda\mu} x^\mu$$

les A_λ et $B_{\lambda\mu}$ étant des constantes arbitraires ($B_{\lambda\mu} = -B_{\mu\lambda}$). Le tenseur $G = D[uZ]$ coïncide avec un tenseur d'essai sur le support de T : on peut donc calculer TG . Si on modifie le choix de u , on ajoute à uZ un tenseur qui lui aussi coïncide avec un tenseur d'essai sur le support de T ;

⁽¹⁶⁾ On choisit l'équation d'état $S^{j4} = 0$

⁽¹⁷⁾ Une fois choisies les bonnes variables, les équations d'Euler deviennent linéaires, comme les autres ...

⁽¹⁸⁾ Et même une variété symplectique ... mais ceci est une autre histoire. Par la même méthode, on pourra faire coexister des particules à spin ou des molécules solides ; la dimension monte alors à 8 ou 12.

⁽¹⁹⁾ Il s'agit d'une mesure qui n'est pas bornée, puisqu'elle est invariante par translation spatiale. Mais les intégrales $\int T_u G d\mu(u)$ sont convergentes pour chaque G .

par conséquent l'accroissement de TG est de la forme TDZ' (Z' = tenseur d'essai), donc nul en vertu de l'équation du mouvement $TD = 0$.

Ainsi la grandeur $TD[uZ]$ est une « grandeur conservée »⁽²⁰⁾. Elle dépend linéairement des coefficients $A_\lambda, B_{\lambda\mu}$; on peut donc l'écrire

$$A_\lambda P^\lambda + \frac{1}{2} B_{\lambda\mu} S^{\lambda\mu} \quad (19)$$

les dix grandeurs $P^\lambda, S^{\lambda\mu}$ ($= -S^{\mu\lambda}$) étant les composantes d'un objet conservé, le *moment*. Le libre choix des dates permet de calculer ce moment à une date arbitraire. Sur l'exemple des équations d'Euler d'un milieu continu quelconque, le calcul des grandeurs (19) fournit le résultat suivant :

$$\begin{aligned} P^4 &= \iiint \rho dx^1 dx^2 dx^3 \\ P^j &= \iiint \rho V^j dx^1 dx^2 dx^3 \\ S^{4k} &= \iiint \rho [x^k - V^k t] dx^1 dx^2 dx^3 \\ S^{jk} &= \iiint \rho [V^j x^k - V^k x^j] dx^1 dx^2 dx^3 \end{aligned} \quad (20)$$

où la valeur des intégrales est indépendante de la date t choisie.

Ainsi l'interprétation du moment est claire : P^4 est la *masse*, P^j l'*impulsion*, S^{jk} le moment *angulaire*, S^{4k} le *passage*⁽²¹⁾.

Une absence tout à fait remarquable dans cette liste : on n'y rencontre pas l'*énergie*. Pourquoi donc ?

Essentiellement parce que la présente description de la mécanique concerne aussi bien les phénomènes *dissipatifs* que les autres. Le bilan d'énergie ne pourrait donc y figurer qu'en termes thermodynamiques, et devrait s'accompagner d'autres grandeurs, telles que l'entropie, la chaleur, la température, etc. L'énergie est donc reléguée ici au rang des variables concernant les lois de comportement⁽²²⁾. Par contre, les grandeurs figurant dans le *moment* ci-dessus restent pertinentes dans ce genre de phénomènes.

La procédure que nous avons utilisée pour construire le moment s'applique à d'autres situations, dont nous avons déjà rencontré quelques unes (par exemple en statique des fils et des poutres); on doit noter que ces procédures utilisent essentiellement les propriétés *topologiques* du vide extérieur au support de la distribution T (Figure 1)⁽²³⁾.

⁽²⁰⁾ Elle ne dépend que de la classe des fonctions u - c'est-à-dire du sens des t croissants.

⁽²¹⁾ Grandeur conservée qui caractérise le mouvement du *centre de masse* X : $mX^k = S^{4k} + P^k t$

⁽²²⁾ Bien sûr, la relativité propose une autre définition de l'énergie, par la formule $E = mc^2$. Mais au niveau actuel, cette définition est transparente : on peut la considérer comme une définition facultative de la variable E .

⁽²³⁾ Chaque *courbe orientée* tracée à l'extérieur de l'objet est le bord d'une surface qu'elle oriente. Il lui est associé un moment à 6 composantes, qui peut se calculer sur l'intersection de la surface et de l'objet. Il change de signe quand on change l'orientation de la courbe. Ce moment est *conservé*, en ce sens qu'il ne dépend que de la courbe qui borde la surface, et plus précisément de la *classe d'homotopie* de cette courbe (les deux courbes tracées sur la figure sont homotopes, tant que les pieds de la chaise ne sont pas posés par terre). De plus la correspondance *classe d'homotopie* \rightarrow *moment* est un morphisme de groupe. Ainsi s'expriment en langage géométrique rigoureux des conséquences de la condition d'équilibre $TD = 0$ que les constructeurs de cathédrales savaient directement exploiter (arcs-boutants).

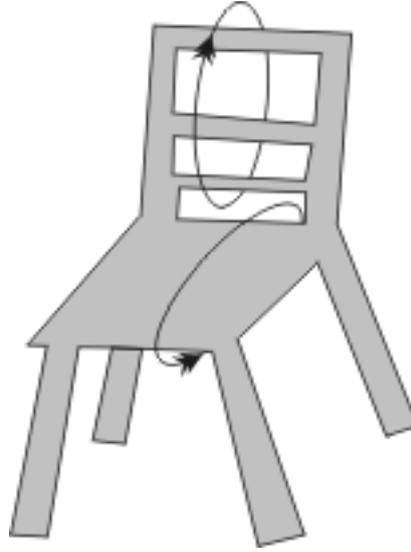


FIG. 1 – Moments conservés et topologie.

FORCES EXTÉRIEURES

Dans la dynamique traitée jusqu'ici, les seuls effets subis par les divers corps étaient des effets de contact (décrits par la technique que nous avons appelée *assemblage*). Comment décrire les autres actions extérieures subies par la matière ?

Champ de pesanteur

La plus immédiate de ces actions, c'est la pesanteur.

Pour la décrire, il suffit d'utiliser le *principe de l'équivalence*, selon lequel les forces de pesanteur sont analogues aux forces d'inertie - et peuvent être annulées par une accélération d'ensemble : pas de pesanteur dans un ascenseur en chute libre.

On calcule donc l'action sur les tenseurs G et Z de la transformation suivante⁽²⁴⁾ :

$$\begin{aligned} x^j &\rightarrow x^j + \frac{1}{2}g^j t^2 \\ t &\rightarrow t \end{aligned}$$

on écrit la relation $G = DZ$ appliquée à ces nouvelles coordonnées, et on la rapatrie aux coordonnées initiales. Ceci fournit une opération D modifiée, qui peut s'écrire :

$$[DZ]_{\lambda\mu} = \partial_\lambda Z_\mu + \partial_\mu Z_\lambda + 2\Gamma_{\lambda\mu}^\nu Z_\nu \quad (21)$$

Cette formule diffère de la précédente (12) par l'apparition de nouveaux termes $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$. Géométriquement, l'opération D s'appelle une connexion⁽²⁵⁾ ; physiquement, D constitue le *champ de pesanteur*.

⁽²⁴⁾ Considérée comme un "changement de coordonnées", un "changement de référentiel", ou encore un "difféomorphisme d'espace-temps" : le choix entre ces interprétations n'a pas d'influence sur le résultat.

⁽²⁵⁾Le statut géométrique des connexions est défini par des formules explicites de transformation des $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ dans un

Dans le cas envisagé, les seuls $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ non nuls sont les Γ_{44}^{ν} , égaux aux composantes g^j de l'accélération de la pesanteur, supposées indépendantes de la position. Mais rien n'empêche de donner une description plus précise de la pesanteur réelle, par exemple en ajoutant des termes

$\Gamma_{4k}^j = \Gamma_{k4}^j = \Omega_k^j$, spécifiques de la rotation de la Terre. La loi $TD = 0$, avec cette nouvelle valeur de D , inclut automatiquement la pesanteur dans tous les modèles de la mécanique.

Voici par exemple ce que deviennent les équations d'Euler (16) :

$$\begin{aligned} \partial_j \Theta^{jk} + \rho \left(V^j \partial_j V^k + \frac{\partial V^k}{\partial t} \right) &= \rho \left(g^k + 2\Omega_k^j V^j \right) \\ \partial_j (\rho V^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

On obtient de même les équations du mouvement du *pendule de Foucault*, ou de tout autre mécanisme soumis à l'action de la pesanteur. Et en particulier les équations de la *statique pesante*.

La pesanteur fait disparaître les grandeurs conservées (20), mais quelques théorèmes généraux subsistent.

Par exemple celui que vous utilisez quand vous mesurez votre masse au moyen de l'action de vos pieds sur une bascule. Parmi les hypothèses de ce théorème, le caractère statique de la pesée.

Électrodynamique

Pour passer de la statique initialement étudiée à la statique *pesante*, l'introduction d'une nouvelle coordonnée x^4 a été nécessaire, qui ne joue apparemment aucun rôle dans le résultat, puisque les translations selon x^4 ne modifient pas l'équilibre. Mais x^4 fait apparaître des grandeurs nouvelles, telles que $\rho = T^{44}$ qui jouent un rôle essentiel dans la pesanteur.

Une procédure analogue permet de traiter l'électrodynamique. Inventons une cinquième coordonnée « muette » x^5 décrivons la matière par une distribution T agissant sur des fonctions d'essai G_{AB} penta-dimensionnelles ($A, B = 1, \dots, 5$). La dynamique s'écrira encore $TD = 0$, mais dans la définition de D

$$[DZ]_{AB} = \partial_A Z_B + \partial_B Z_A + 2\Gamma_{AB}^C Z_C \quad (23a)$$

on complétera les termes $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ précédents par des termes

$$\Gamma_{\mu 5}^{\lambda} \quad (23b)$$

que nous allons interpréter. À cet effet, il suffit de calculer les nouvelles équations du mouve-

changement de coordonnées. Ces $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ (changés de signe) s'appellent *symboles de Christoffel* ; ils sont symétriques : $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$. Les connexions dont on peut annuler les $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ par changement de coordonnées sont les connexions *plates* ; on peut les détecter par la nullité du *tenseur de courbure* $R_{\lambda\mu,\rho}^{\nu} = \partial_{\lambda} \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} - \partial_{\mu} \Gamma_{\lambda\rho}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu}$. Le champ de gravitation défini ci-dessous avec les g^j et les Ω_k^j est un exemple de *champ courbé*.

ment $TD = 0$ d'un milieu continu :

$$\begin{aligned}\partial_j \Theta^{jk} + \rho \left(V^j \partial_j V^k + \frac{\partial V^k}{\partial t} \right) &= B_j^k J^j + E^k r \\ \partial_j (\rho V^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \partial_j J^j + \frac{\partial r}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{23c}$$

où l'on a posé $B_j^k = 2\Gamma_{j5}^k$, $E^k = 2\Gamma_{45}^k$, $J^j = T^{j5}$, $r = T^{45}$ (26).

Elles coïncident avec la théorie classique de l'électromagnétisme si B est l'induction magnétique, E le champ électrique, J le vecteur densité de courant, r la densité de charge électrique⁽²⁷⁾

Cette construction s'étend au cas des milieux condensés. Par exemple, pour une particule sans spin, on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[m \frac{dx^j}{dt} \right] &= q \left[B_k^j \frac{dx^k}{dt} + E^j \right] \\ m &= C^{te} \\ q &= C^e\end{aligned}\tag{24a}$$

avec :

$$TG = \int m \frac{dx^A}{dt} \frac{dx^B}{dt} G_{AB} dt \quad q = m \frac{dx^5}{dt}\tag{24b}$$

équations où la charge électrique q s'interprète géométriquement⁽²⁸⁾.

MISE EN PERSPECTIVE

Nous venons d'indiquer, sur un certain nombre d'exemples, comment on pouvait répartir les rôles de la mécanique entre matière-distribution T et champ-connexion D . Ceci avec une « équation du mouvement » universelle $TD = 0$, qui se compose avec les diverses lois de comportement.

En apparence, nous nous étions placés au niveau de la mécanique la plus classique ; mécanique caractérisée par l'invariance des lois sous l'action du groupe de Galilée.

En fait, dans ce qui précède, rien d'essentiel ne privilégie cette invariance - ni même l'invariance euclidienne par « rotations » de l'espace. Le premier niveau des résultats précédents (statique et dynamique, lois de conservation) s'insère dans un cadre plus large, celui de la géométrie affine de l'espace-temps⁽²⁹⁾.

La relativité restreinte est caractérisée par l'invariance sous le groupe de Lorentz-Poincaré. Or ce groupe, comme le groupe de Galilée, est sous-groupe du groupe affine ; par conséquent

⁽²⁶⁾ Nous n'avons pas écrits les termes de pesanteur, qui interviennent comme précédemment.

⁽²⁷⁾ Les premières équations ($k = 1, 2, 3$) font apparaître les forces électromagnétiques, l'équation 4 reste inchangée, l'équation 5 est l'expression de la conservation de l'électricité.

⁽²⁸⁾ Les équations (23c) et (24a) utilisent l'approximation non-relativiste $\Gamma_{k5}^4 = 0$. La dynamique relativiste s'obtient en prenant $\Gamma_{k5}^4 = \frac{1}{c^2} \Gamma_{45}^k$.

⁽²⁹⁾ Le groupe affine, c'est le groupe d'invariance de la connexion plate que nous avons notée D (formule (3)).

les résultats précédents sont tout aussi « relativistes » que « classiques ». Simple affaire d'interprétation . . .

Ainsi des équations d'Euler des milieux continus sous leur forme $TD = 0$. Nous en avons donné une interprétation classique (équations (16)) qui met en jeu explicitement une transformation de Galilée - interprétation « non-relativiste » donc. Mais cette interprétation fournit une passerelle entre la mécanique classique et la mécanique affine ; elle est là pour indiquer que le cadre classique, convenablement formulé, ne s'oppose en rien aux principes « relativistes » de la physique.

La suite de l'exposé (forces extérieures, électrodynamique) fait accéder à un autre niveau : le groupe affine est remplacé par le groupe des *difféomorphismes* de l'espace-temps, la géométrie affine par la géométrie différentielle. La description qu'il donne de la matière passive est ainsi parfaitement compatible avec la théorie de la *relativité générale*.

Là où les équations divergent, c'est dans l'expression de la matière comme source du champ. Dans les deux cas, le champ de gravitation s'interprète comme connexion ; mais la théorie newtonienne de la gravitation (un potentiel gravitationnel soumis à l'équation de Poisson) est incompatible avec celle de la relativité générale (dix potentiels gravitationnels soumis aux équations de Hilbert-Einstein).

En ce qui concerne l'électrodynamique, situation analogue : l'exposition proposée ici interprète le champ électromagnétique par une connexion, le courant et la charge électrique⁽³⁰⁾ par le tenseur-distribution de matière - ceci grâce à l'utilisation d'une variable auxiliaire x^5 .

Les équations de champ vont utiliser 4 nouveaux potentiels, soumis aux équations de Maxwell ; équations qui se géométrisent dans la théorie à 5 dimensions de Kaluza-Klein.

Là aussi donc, l'outil proposé montre la cohérence entre l'électrodynamique classique et la théorie relativiste.

La limite des modèles de ce genre, c'est évidemment la *physique quantique*. La mécanique que nous pratiquons apparaît comme une interprétation macroscopique cohérente d'une matière dont la structure microscopique est quantique.

⁽³⁰⁾ Et aussi la distribution de *moment magnétique*, avec le statut de second gradient.