

***C'EST QUANTIQUE ? DONC C'EST
GÉOMÉTRIQUE***

Jean-Marie SOURIAU

Université de Provence, Aix-en-Provence, France

Dominique Flament (dir)

Série *Documents de travail* (Équipe F₂DS)

Feuilletages -quantification géométrique : textes des journées d'étude des 16 et 17 octobre 2003,
Paris, Fondation Maison des Sciences de l'Homme, 2004

C'est Quantique ? donc c'est géométrique

Jean-Marie Souriau

Plaçons-nous d'abord dans le cadre de la mécanique classique. Étudions un système mécanique isolé, non dissipatif - nous dirons brièvement une « chose ».

L'ensemble des mouvements de cette chose est une variété symplectique. Pourquoi ? il suffit de se reporter à la Mécanique Analytique de Lagrange (1811) ; l'espace des mouvements y est traité comme variété différentiable ; les coordonnées covariantes et contravariantes de la forme symplectique y sont écrites ⁽¹⁾

Évoquons maintenant la géométrie du 20^{ème} siècle.

Soit G un groupe difféologique (par exemple un groupe de Lie) ; μ un moment de G ⁽²⁾ ;

alors l'action du groupe sur μ engendre canoniquement un espace symplectique ⁽³⁾.

Présomption épistémologique : derrière chaque chose est caché un groupe G (sa "source"), et les mouvements de la chose sont simplement des moments de G ⁽⁴⁾.

L'isolement de la chose indique alors que le groupe de Poincaré (resp. de Galilée-Bargman) est inséré dans G ; voilà l'origine des grandeurs conservées relativistes (resp. classiques) associées à un mouvement x : elles constituent simplement le moment induit sur le groupe spacio-temporel par le moment-mouvement x .

La structure "quantique" ⁽⁵⁾pourra apparaître sous forme de l'axiome suivant : le centre de la source G est isomorphe au tore $T = U(1)$, et la circulation sur T d'un mouvement-moment est égale à la constante de Planck ⁽⁶⁾

Formulons maintenant le "principe de correspondance" : à cet espace classique des mouvements va être associé un espace des états, à vocation "quantique".

La définition générale des états est purement algébrique : un état d'un groupe G , ce sera une fonction complexe μ sur G , astreinte aux axiomes suivants :

Si $g_1 \dots g_n$ sont des éléments de G , la matrice dont les éléments sont les $\mu(g_j^{-1} g_k)$ est positive.

$$\mu(\text{neutre}) = 1$$

Tout groupe possède des états : par exemple les fonctions caractéristiques de ses sous-groupes, ses caractères (morphisme dans T), et bien d'autres— comme le cosinus pour le groupe additif des réels.

1. Ce sont les "parenthèses" et "crochets" de Lagrange

2. Un moment, c'est une 1-forme invariante à gauche sur G

3. Ces groupes pourront avoir une dimension infinie ; une analyse exhaustive de cette situation a été construite par Patrick Iglesias (se reporter à son site, ENS de Lyon).

4 Doublet latin mnémotechnique : momentum-movimentum.

5 Niveau épistémologique : la première théorie des quanta, celle de Bohr.

6. Géométriquement, cela va faire apparaître un fibré en cercles au dessus de l'espace des mouvements

Les états d'un groupe constituent évidemment un convexe, dont les points extrémaux s'appelleront états purs.

À chaque état μ d'un groupe G est associé canoniquement un espace de Hilbert H_μ constitué de fonctions complexes sur G (dont μ fait partie), et une représentation unitaire r_μ de G sur H_μ , liée à μ par

$$\mu(g) = \langle \mu, r_\mu(g)\mu \rangle$$

Alors :

Toutes les représentations unitaires de tous les groupes se construisent ainsi.

r_μ irréductible $\Leftrightarrow \mu$ est un état pur.

Pour tout vecteur unitaire $\psi \in H_\mu$, la formule $\mu_\psi(g) = \langle \psi, r_\mu(g)\psi \rangle$ définit un nouvel état μ_ψ .

Tout produit d'états est un état : ainsi se construisent les produits tensoriels de représentations. Etc.

Géométrie de l'aléatoire : on choisit un ensemble X , et un sous-groupe A de T^X ⁽⁷⁾. À chaque point x de X , associons la certitude μ_x , fonction définie sur A par $\mu_x(a) = a(x)$; alors μ_x est un état du groupe abélien A .

Le convexe compact engendré par les certitudes est constitué d'états, que nous appellerons hasards.

Si X est fini, tout hasard μ peut s'écrire $\mu(a) = p_1 a(x_1) + \dots + p_n a(x_n)$, les p_j étant positifs de somme 1 : on voit apparaître les probabilités.

Dans les cas infinis, ce sera le choix du groupe A qui "probabilisera" l'ensemble X : inutile et déconseillé de recourir à la théorie de l'intégration.

Exemples :

- L'interprétation probabiliste de la mécanique quantique.
- Dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, on pourra probabiliser par le groupe harmonique constitué des $\exp(i\omega x)$; les "hasards harmoniques" contiennent toutes les variables aléatoires classiques, et quelques autres – comme l'état équiparti sur un réseau arbitraire.

Utilisons ces structures géométriques pour relire les "Principia" de Dirac (1930)

Pour étudier quantiquement une chose, partons de sa source G .

Les "observations" de la chose⁽⁸⁾, ce seront les composantes connexes des sous-groupes abéliens de G .

Les états quantiques, ce seront ceux qui ont la propriété suivante : sur toute observation, ils engendrent un hasard⁽⁹⁾

⁷ T^X : Groupe multiplicatif des fonctions complexes sur X à valeurs dans le tore T

⁸ Observations au sens de Dirac. Il les caractérise par leur algèbre de Lie

⁹ Selon un processus précisé dans la thèse de François Ziegler (Marseille, 1996)

Avec ce statut géométrique, on reconstruit les bases de la mécanique Quantique :

- Les relations d'incertitude de Heisenberg deviennent nécessaires, en se renforçant. Exemple : si l'impulsion d'un point matériel est certainement nulle, sa position est équipartie dans l'espace. De même l'énergie n'est "certaine" que dans les états "stationnaires".
- Les espaces de Hilbert associés aux états quantiques purs des particules élémentaires sont engendrés par des solutions d'équation d'onde (¹⁰).
- Les états qui intéressent les chimistes ne sont pas purs. Exemple : les "états de Gibbs", qui sont associés à la "quadri-vitesse" du laboratoire et à sa "température". Le passage au "zéro absolu" produit l'état fondamental, utilisé pour modéliser la structure des molécules.

¹⁰ Les diverses équations d'onde (Schrödinger, Klein-Gordon, Pauli, Dirac, équation des neutrinos, de Maxwell) sont ainsi produites dans « structures des systèmes dynamiques », J.M Souriau (Dunod 1968, traduction Birkhäuser 1997).